ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

2015 · №4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ВСТРЕЧА В УГЛУ


1


2


3

Перед вами головоломка греческого мастера Михаила Тулузаса (Michail Toulouzas).
В коробку 5 на 5 уложены 11 прямоугольных деталей-брусочков, начальное расположение показано на рисунке 1.
Как обычно бывает в такого рода головоломках, детали можно двигать, но нельзя вынимать из коробки. Цель – передвинуть темные брусочки в левый нижний угол, как на рисунке 2: два маленьких темных брусочка должны оказаться у левой стенки коробки, а большой темный – рядом с ними у нижней стенки (положение светлых брусочков при этом не существенно).
На рисунке 3 вы видите коробку, из которой вынуты все детали. Правда, два брусочка все равно в ней остались – они приклеены, и в процессе решения головоломки их двигать нельзя. Это сильно ограничивает возможности и усложняет задачу. Но, надеемся, вы с ней все равно справитесь.
Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ

ИЮЛЬ АВГУСТ 2015 № 4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Мыльные пузыри в фотографиях

Л.СВИСТОВ

Наши наблюдения

Как-то летом на даче были сделаны фотографии мыльных пузырей, одна из них представлена на рисунке 1. Мыльная пленка отражает часть света, и поэтому в пузыре, как в зеркале, можно увидеть предметы, находящиеся вокруг фотографа. Например, деревья или крыши соседних домов. Если очень постараться, то удается рассмотреть даже самого фотографа. А изображение объектива фотоаппарата находится в центре изображения пузыря.

Рис. 1

Конечно, «зеркальная» поверхность мыльного пузыря – неплоская, и изображения сильно искажены. При этом самые большие искажения возможны на краях пузыря. Несмотря на это, можно заметить, что, помимо пейзажа с крышами и солнцем в верхней половине пузыря, в нижней его половине имеется перевернутое изображение пейзажа. Быть может, это отражение в воде? Но на даче, к сожалению, озера не было. Кроме того, обратим внимание на то, что изображение совсем не такое, как при отражении в воде. Предмет и его отражение от поверхности воды *зеркально* симметричны, как это видно, например, на рисунке 2. Изображения же в мыльном пузыре – *центрально* симметричны.

Рис. 2

Изображению солнца соответствует еще одно, с другой стороны от центра пузыря. То же самое происходит и с изображениями крыш и деревьев. Взяв линейку, можно убедиться в том, что расстояния от изображения любого предмета до центра мыльного пузыря и от центра до его двойника одинаковые.

Вероятно, у читателей уже имеется объяснение такого необычного изображения. Мы же пока не будем это обсуждать, а обратим внимание на другие любопытные особенности фотографий.

Изображения все же не совсем симметричны. На пузыре видны серии ярких пятен, которые симметрией не обладают (см. рис.1, 3). Такие пятна видны только на фотографиях пузырей, освещенных лучами солнца. Центр окружности, два изображения солнца и яркие пятна находятся на одной прямой, причем около краев пузыря пятна сгущаются. Картина ярких пятен зависит от положения мыльного пузыря по отношению к солнцу и к фотографу.

Предлагаем читателям самостоятельно объяснить природу наблюдаемых эффектов и «расшифровать» пути солнечных лучей. Наше объяснение приводится во второй части статьи, в разделе «Геометрическая оптика мыльного пузыря».

Теперь обратим внимание на цвет ярких пятен. На фотографиях пузыря, сделанных с ярким фоном, как

[1] Фотографии А.Подобедова и Л.Свистова.

Рис. 3

на рисунке 1, изображения солнца и наблюдаемые пятна – белые. Чтобы увеличить чувствительность к цвету, мы сделали снимки пузыря на темном фоне, выбрав маленькую экспозицию фотоаппарата (рис.3). Конечно, мыльные пузыри стали видны плохо, но зато яркие пятна на фотографиях стали цветными. В чем причина раскраски? Почему вблизи краев пузыря цвета более насыщенные?

Очень красивыми оказались изображения пузырей при освещении их вспышкой фотоаппарата – на изображениях появилась система разноцветных концентрических сегментов (рис.4).

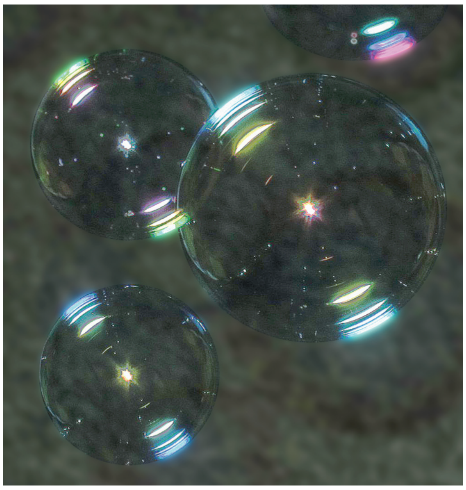


Рис. 4

Предлагаем читателям самостоятельно поискать объяснение раскраски пятен и сегментов на фотографиях. Наши соображения на эту тему можно будет найти в третьей части статьи, в разделе «Физическая оптика мыльного пузыря».

Геометрическая оптика мыльного пузыря

Рассмотрим луч, падающий на плоскую границу раздела двух прозрачных сред. Пусть это будет, например, солнечный луч, падающий из воздуха на поверхность воды (рис.5). Тогда среда 1 – воздух, а среда 2 – вода. В точке падения луч частично преломится и будет распространяться в воде, а частично отразится от поверхности раздела и будет распространяться в возду-

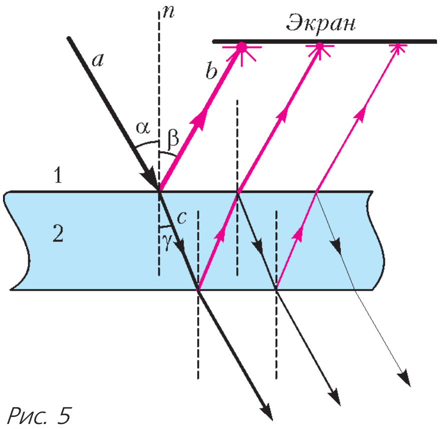


Рис. 5

хе. На рисунке 5 изображены падающий (a), отраженный (b) и преломленный (c) лучи, нормаль к поверхности раздела (n), а также углы падения (α), отражения (β) и преломления (γ), отсчитанные, как обычно, от нормали.

Как известно из школьного курса оптики, во-первых, все три луча и нормаль к поверхности раздела лежат в одной плоскости, а во-вторых, углы падения, отражения и преломления связаны соотношениями

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1, n_2 – показатели преломления сред 1 и 2 соответственно. Интенсивность падающего света делится между интенсивностями отраженного и преломленного света. Деление луча наблюдается также и при его выходе из воды в воздух.

Если луч падает на плоскопараллельную пластинку, например стеклянную, то ожидается несколько параллельных отраженных лучей и несколько параллельных прошедших. Отраженные лучи на рисунке 5 изображены красным цветом, а прошедшие – черным. Такие серии лучей можно увидеть в эксперименте, если падающий луч достаточно узкий. Например, если использовать узкий луч лазерной указки и толстое, скажем оконное, стекло. Экраном может служить потолок. В случае широкого (по сравнению с толщиной пластины) луча все прошедшие и все отраженные лучи сольются в широкий отраженный луч и в широкий прошедший.

Теперь попробуем разобраться, что видит наш глаз или что фиксирует на изображении мыльного пузыря фотоаппарат. Прежде всего, отметим, что схемы лучей на рисунке 5 не совсем полные. Они справедливы только для абсолютно прозрачных тел. Воду, а тем более мыльную воду, такой не назовешь. Действительно, при прохождении световых лучей через воду энергия луча частично переходит в тепло и частично в энергию рассеянного света. Благодаря рассеянному свету мы видим мыльный пузырь как объект сферической формы.

Попробуем объяснить, почему на фотографии пузыря наблюдается несколько изображений.

Во-первых, внешняя поверхность пузыря является выпуклым зеркалом для предметов, находящихся в направлении фотографа. Если это далекие предметы, такие как солнце, деревья и крыши домов, то каждое изображение будет мнимым, прямым и находиться оно будет вблизи фокуса такого выпуклого зеркала – на расстоянии, равном половине радиуса сферы, т.е. $R/2$.

Во-вторых, лучи, исходящие от тех же предметов, частично проходят внутрь пузыря и отражаются от его внутренней поверхности, которая является для них вогнутым зеркалом. Отраженные лучи будут давать второе изображение предмета, находящееся на расстоянии $R/2$ от внутренней поверхности сферы. Это изображение будет перевернутым и действительным.

Оба изображения находятся внутри мыльного пузыря, и расстояние между ними приблизительно равно R. Фотоаппарат во время съемки находится на расстоянии гораздо большем, чем радиус пузыря. Поэтому на фотографии изображения получаются резкими и центрально симметричными.

Если рассмотреть фотографии более внимательно, то можно увидеть большее число наложенных изображений. Например, на рисунке 1 хорошо видны изображения досок сарая, которые находятся за мыльным пузырем. Изображение досок получается в результате двух последовательных отражений от двух вогнутых внутренних поверхностей пузыря. Вообще говоря, можно наблюдать изображения, получающиеся в результате большего чем два числа отражений от внутренней поверхности пузыря. Тем не менее, хорошо видны изображения, получающиеся в результате многих отражений только от очень ярких объектов, таких как солнце или вспышка фотоаппарата, поскольку интенсивность света с каждым отражением быстро убывает.

Можно предположить, что яркие пятна на фотографиях – это изображения солнца, получающиеся в результате нескольких отражений от внутренней поверхности пузыря. Попробуем найти местоположения этих изображений и проверить нашу гипотезу. Пусть лучи от солнца падают на пленку мыльного пузыря, частично отражаясь и частично проходя сквозь нее. Поскольку пленка очень тонкая, то прошедший луч будет с хорошей точностью продолжением падающего. Попав внутрь мыльного пузыря, луч начинает свое путешествие внутри него. На рисунке 6 изображен путь одного из таких лучей внутри мыльного пузыря сферической формы. При этом после каждого отражения от внутренней поверхности пузыря луч становится менее интенсивным.

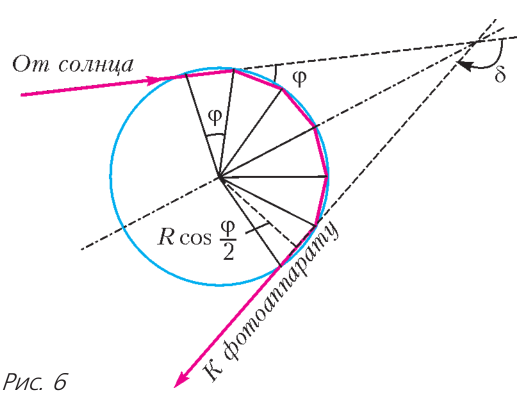


Рис. 6

Понятно, что световой луч, падающий на мыльный пузырь, и все лучи, получающиеся в результате отражений луча внутри пузыря, находятся в одной плоскости, проходящей через центр пузыря. Наши читатели, несомненно, знакомы с основами стереометрии и смогут это легко доказать, используя законы отражения и преломления света. Впрочем, это можно понять вообще ничего не доказывая. Действительно, проведем плоскость через падающий луч и центр сферы. Эта плоскость разделит сферу на две одинаковые половинки. Для определенности будем называть одну половинку верхней, а другую – нижней. Отметим, что понятия верха и низа здесь условные, так как они зависят от ориентации наблюдателя, т.е. от того, где находятся его голова, а где – ноги. Очевидно, что у падающего луча есть проблема выбора. Если он отдаст предпочтение верхней полусфере и отразится в какую-то ее точку, то он «обидит» нижнюю, а она ничем не хуже верхней. Единственная возможность не «обидеть» ни одну из полусфер – это оставаться в проведенной плоскости после всех отражений.

Будем для простоты считать, что солнечные лучи, падающие на пузырь, параллельны, или, другим словами, будем считать солнце удаленным точечным источником света. Тогда все лучи, попадающие в объектив фотоаппарата, находятся в плоскости, проходящей через солнце, фотоаппарат и центр мыльного пузыря. Чтобы попасть в объектив фотоаппарата, солнечный луч должен в результате отражений повернуться на угол δ, определяемый их взаимным расположением.

На рисунке 7 показаны лучи, приходящие в объектив после одного отражения. Эти лучи зададут положения двух самых ярких изображений солнца, симметрично расположенных на фотографии. Расстояние от центра пузыря до этих лучей будет $AO = OB = R\cos\frac{\delta}{2}$. На фотографиях изображения будут находиться на расстоянии $R'\cos\frac{\delta}{2}$ от центра, где R' – радиус изображения пузыря. Используя фотографии, с помощью циркуля и линейки мы можем построить угол δ. Заметим, что непосредственное измерение угла между удаленными объектами является очень непростой экспериментальной задачей, особенно если учесть, что один из объектов летит.

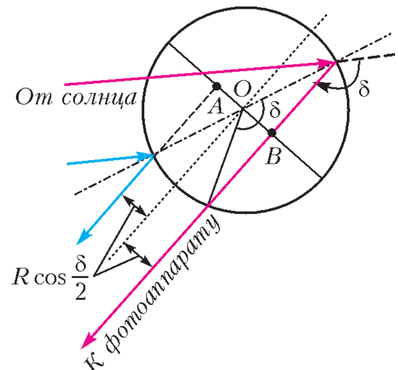


Рис. 7

Займемся теперь изображениями солнца, получаемыми в результате многократного отражения лучей от внутренней поверхности пузыря.

На рисунке 6 показаны солнечные лучи, которые, отразившись пять раз от внутренней поверхности пузыря, попадают в фотоаппарат. При каждом отражении луч поворачивается на один и тот же угол φ. Угол

φ зависит от места падения его на мыльный пузырь и может изменяться в пределах $-180° < \varphi \le 180°$. В фотоаппарат попадет только такой луч, который после нескольких отражений повернется на угол δ ($-180° < \delta \le$

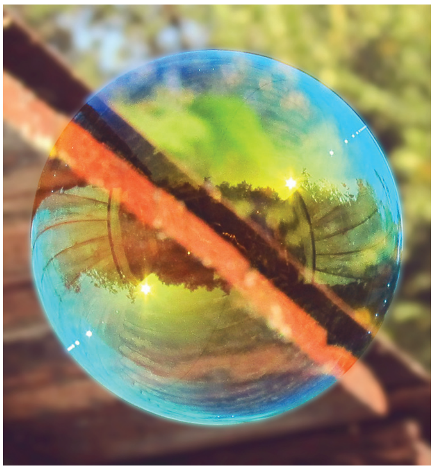


Рис. 8

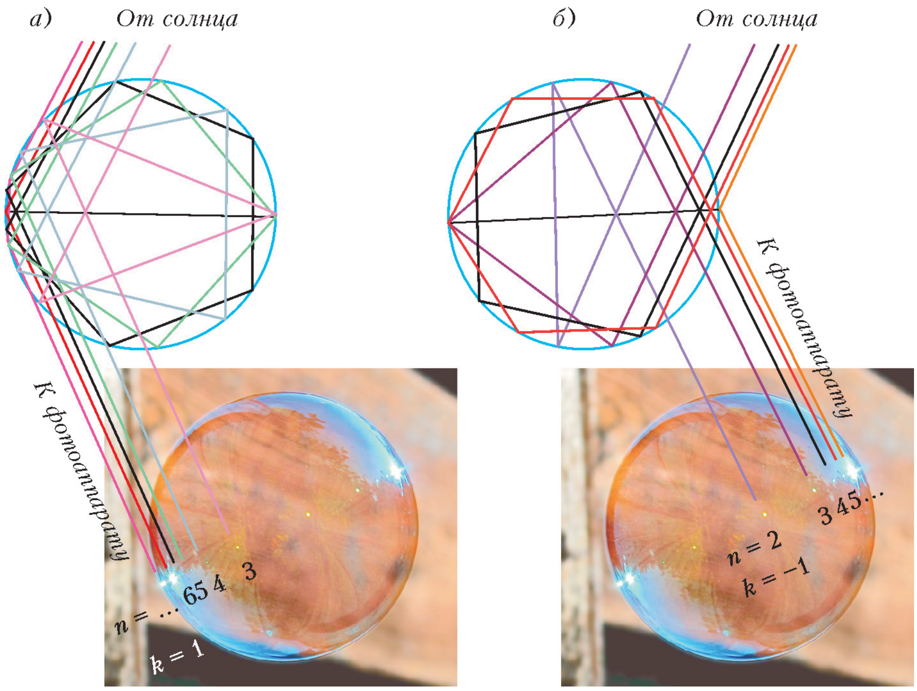


Рис. 9

$\le 180°$). Это условие можно записать в виде уравнения

$$n\varphi = \delta + k \cdot 360° .$$

Здесь натуральное число n определяет число отражений луча от внутренней поверхности пузыря, а целое число k – число поворотов луча на полный угол, которые он совершает, прежде чем выйти из пузыря и попасть в объектив фотоаппарата. При этом знак k определяет направление поворота. На фотографиях засвеченная точка ожидается удаленной от центра изображения на расстояние $R' \cos(\varphi/2)$, где R' – радиус изображения.

На рисунке 8 на фотографии пузыря рисками помечены вычисленные положения изображений, полученные для различных значений k. Для наглядности риски, соответствующие разным k, имеют разные длины. Интенсивность изображений спадает с ростом числа отражений, поэтому лучше всего видны изображения с $k = 0,\ \pm 1$. Видно, что ожидаемые положения изображений с разными k и n неплохо согласуются с положениями ярких пятен на фотографиях.

По фотографии можно восстановить ход солнечных лучей, попадающих в фотоаппарат. На рисунке 9,*а* изображен ход лучей, дающих изображения, которые внутри пузыря поворачиваются на положительный угол ($\varphi > 0$), а на рисунке 9,*б* – на отрицательный угол ($\varphi < 0$). Напомним, что все лучи находятся в плоскости, проходящей через солнце, фотоаппарат и пузырь.

Вернемся теперь к фотографиям, полученным при освещении встроенной вспышкой фотоаппарата (см. рис.4). Лучи от вспышки и лучи, попадающие в объектив после отражений, с хорошей точностью располагаются на параллельных прямых. В этом случае любая плоскость, проходящая через объектив и центр пузыря, будет содержать лучи от вспышки. Поэтому набор ярких точек должен наблюдаться в каждой из таких плоскостей, т.е. изображения вспышки следует ожидать в виде концентрических окружностей. В эксперименте же наблюдаются не полные окружности, а дуги. Это можно объяснить тем, что встроенная вспышка находится на небольшом расстоянии от объектива. Иными словами, падающие и отраженные лучи все-таки не совсем параллельны.

Чтобы определить радиусы ярких окружностей, нужно в приведенное выше уравнение подставить значение δ, равное $180°$:

$$n\varphi = 180° + k \cdot 360° .$$

Радиусы наиболее ярких окружностей ($k = 0$) определяются соотношением

$$r = R' \cos \frac{180°}{2n} .$$

Это радиусы окружностей, вписанных в правильные многоугольники с четным числом сторон, равным $2n$, которые, в свою очередь, вписаны в изображение мыльного пузыря. И это соответствует наблюдению – этот удивительный результат проиллюстрирован на рисунке 10.

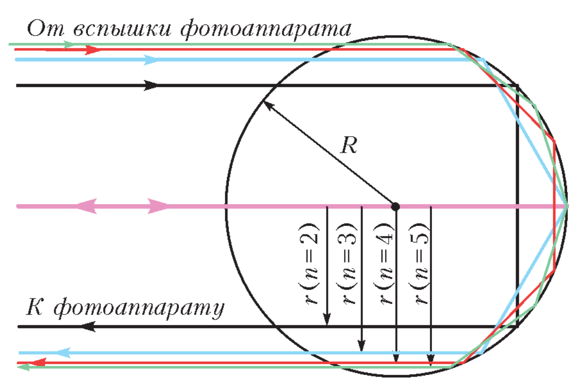


Рис. 10

(Продолжение см. на с. 12)

Интеграл и оценки сумм

А.ЕГОРОВ

Возможно, вам приходилось решать задачи, связанные с оценками величины сумм вида

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n), \qquad (1)$$

где f – некоторая функция. Примером может служить задача М812, опубликованная в «Задачнике «Кванта» в 1983 году (автор С.Майзус):

Докажите, что при всех натуральных n справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Более или менее ясно, что вычислить эту сумму мы не сможем. Но ведь точное значение суммы нам и не нужно. Нужна оценка.

Приведем авторское решение.

Решение. Заметим, что

$$a_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Сложив полученные неравенства при k = 1, 2, …, n, получим

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 2.$$

В этом решении использован довольно изящный искусственный прием, додуматься до которого не очень просто.

Еще труднее доказать, например, такое неравенство:

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$$

при всех натуральных n.

Упражнение 1. Проделайте это.

Асимптотические выражения

Сама по себе задача о вычислении сумм вида

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

где f – некоторая функция, как правило (за исключением таких простых сумм, как сумма арифметической и геометрической прогрессий, а также некоторых сумм, которые с помощью преобразований приводятся к более простым), безнадежно сложна. Даже такую на вид простую сумму, как

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

записать в свернутом виде $H_n = \Phi(n)$, где $\Phi(n)$ – некоторая достаточно обозримая функция от n, невозможно. Однако (даже чаще всего) бывает важно знать, как ведет себя сумма S_n (в частности, H_n) при больших значениях n (или, как говорят математики, при $n \to \infty$). А для этого иногда удается найти так называемое *асимптотическое* выражение суммы S_n, т.е. найти такую сравнительно простую функцию $\Phi(n)$, для которой отношение $\frac{S_n}{\Phi(n)}$ стремится к 1 при n, стремящемся к бесконечности. В таком случае мы будем писать

$$S_n \sim \Phi(n).$$

Так, для хорошо известной суммы

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

имеем

$$S_2(n) \sim \frac{n^3}{3}.$$

Вообще же, как мы потом увидим,

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} \text{ при } p > -1,$$

$$\text{а } H_n \sim \ln n.$$

Дальше мы поговорим об одном общем методе оценки сумм вида (1)

Если функция *f* убывает

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и убывает при $x > 0$. Предположим также, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Пусть $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

Нарисуем график функции f (рис.1). Легко видеть, что сумма $f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ равна площади голубой ступенчатой фигуры, показанной на рисунке 1, *а*, а она меньше площади криволинейной трапеции $ABCD$. В свою очередь, площадь криволинейной трапеции – это интеграл $\int_1^n f(x)dx$. Из сказанного следует, что

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) < \int_1^n f(x)dx. \qquad (2)$$

Точно так же площадь красной ступенчатой фигуры на рисунке 1, *б* больше площади той же криволинейной

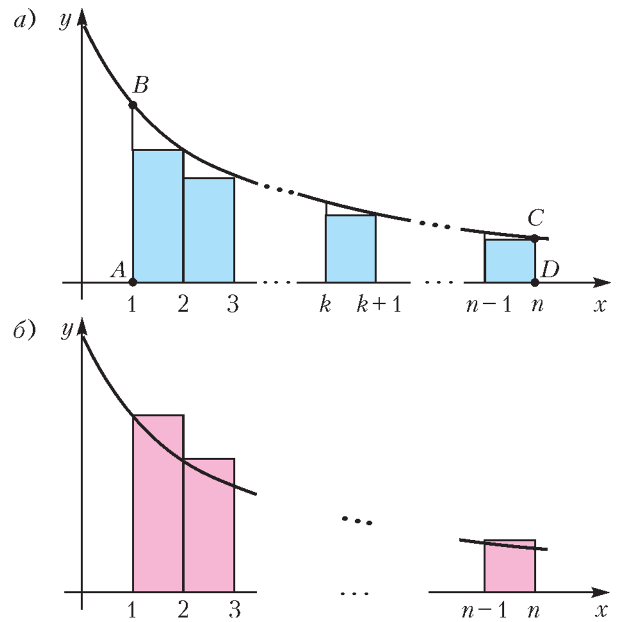


Рис. 1

трапеции, и потому

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)>\int_1^n f(x)dx. \qquad (2')$$

Прибавляя $f(1)$ к обеим частям неравенства (2) и $f(n)$ к обеим частям неравенства $(2')$, получим оценку

$$f(n)+\int_1^n f(x)dx<S_n<f(1)+\int_1^n f(x)dx. \qquad (3)$$

Мы получили двухстороннюю оценку суммы S_n.

Рассуждая аналогично, можно получить и более точные оценки суммы S_n, если оценивать с помощью интеграла не всю сумму S_n, а только сумму слагаемых, начиная с некоторого $k>1$:

$$S_{k-1}+f(n)+\int_k^n f(x)dx<S_n<S_k+\int_k^n f(x)dx. \qquad (3')$$

Для этого будем оценивать так же, как и раньше, сумму

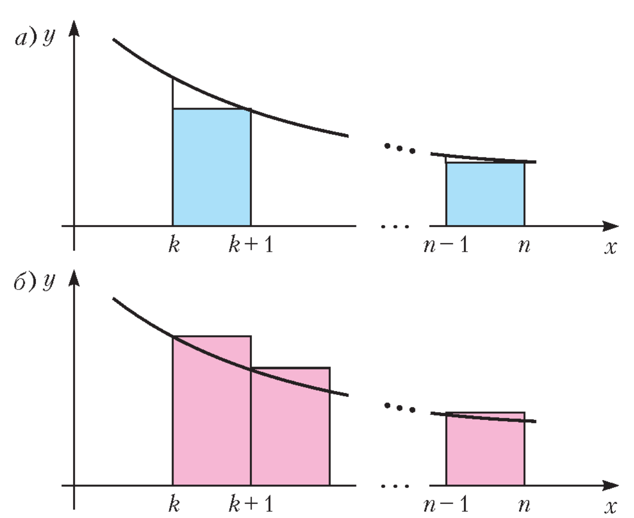


Рис. 2

$f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)$ (рис. 2, *а* и *б*). Сравнение площадей ступенчатых фигур дает неравенства

$$f(k+1)+\ldots+f(n)<\int_k^n f(x)dx$$

и

$$f(k)+\ldots+f(n-1)>\int_k^n f(x)dx.$$

Прибавляя к обеим частям этих неравенств недостающие слагаемые, получаем неравенства $(3')$.

Упражнения

2. Докажите, что при $p>1$ и при всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}<\frac{p}{p-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p-1}\le 1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots\le\frac{p}{p-1}.$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{n}+\ln n<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n+1$$

(из результата этого упражнения следует, что $H_n\sim\ln n$).

Попробуем теперь применить полученные оценки к сумме из задачи М812. Из (2) сразу получается, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{1}{2}+\int_1^n\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

и у нас возникают трудности с вычислением интеграла. Пока сообщим читателям, что первообразная подынтегральной функции равна $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Тогда сразу (по формуле Ньютона – Лейбница) получается оценка

$$S_n<\frac{1}{2}+2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}+2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}.$$

К сожалению, правая часть больше двух, так что в этой задаче искусственный прием дает лучший результат, чем общий метод.

Уточнить оценку можно с помощью неравенства $(3')$. Пусть $k=2$. Тогда

$$S_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\int_2^n\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{2}<1{,}97$$

(последняя оценка без труда получается с помощью калькулятора).

Это уже лучше, чем оценка из условия задачи. Однако нас не покидает чувство некоторой неудовлетворенности: откуда мы взяли первообразную подынтегральной функции? Хорошо, конечно, если мы ее знаем. Ну а если нет?

Тогда тоже находится выход. Легко видеть, что

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}<\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-3/2}.$$

Поэтому, в силу (3′) и поскольку первообразная функции $f(x) = x^{-3/2}$ равна $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, имеем

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \int_k^n x^{-3/2}dx =$$

$$= S_k + \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{n}} < S_k + \frac{2}{\sqrt{k}},$$

так что при $k = 4$ получаем

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{10} + 1 < 1{,}99.$$

Упражнение 4. Решите теперь упражнение 1.

Заметим, что, даже изменив функцию, мы получили оценку лучшую, чем в условии.

Неравенства (3) позволяют судить о поведении сумм S_n при больших n. Рассмотрим последовательность

$$u_n = S_n - \int_1^n f(x)\,dx.$$

Из (3) следует, что

$$f(n) < u_n < f(1).$$

Поэтому u_n – ограниченная последовательность. В то же время легко видеть, что u_n убывает, т.е. $u_{n+1} < u_n$.

Упражнение 5. Убедитесь в этом.

Из теоремы Вейерштрасса о существовании предела ограниченной монотонной последовательности следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$. Таким образом,

$$S_n = \int_1^n f(x)\,dx + c + \varepsilon_n, \tag{4}$$

где $\varepsilon_n = u_n - c$ стремится к нулю.

Мы установили, что при больших n сумма S_n с точностью до постоянного слагаемого c и величины ε_n, стремящейся к нулю, *равна* интегралу. Это замечательный результат.

Например, для функции $y = \dfrac{1}{x}$ получаем

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n.$$

Число γ в этом равенстве – очень важная константа. Она называется *постоянной Эйлера* и часто встречается в задачах анализа и теории чисел. Любопытно заметить, что о самом числе $\gamma = 0{,}557\ldots$ до сих пор мало что известно. Никто не знает, например, является ли оно рациональным или иррациональным.

Числовые ряды

Формальная сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – некоторая последовательность действительных чисел, называется *числовым рядом*. Понятие ряда – одно из важнейших понятий современной математики. Нас будут интересовать ряды с положительными членами: $a_i > 0$ при всех $i \in \mathbb{N}$.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм, т.е. сумм вида $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, …, имеет предел. Из теоремы Вейерштрасса следует, что сходимость ряда с положительными членами равносильна ограниченности последовательности S_n.

Формула (4) дает так называемый интегральный признак сходимости ряда

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Именно, такой ряд при монотонной и стремящейся к нулю функции f сходится тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Упражнения

6. Исследуйте сходимость рядов:

а) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1} + \ldots$;

б) $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$, где $p > 0$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

7. Докажите, что если ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $0 < b_n \le a_n$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже сходится.

8. Докажите для любой положительной возрастающей функции f неравенства

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx < S_n < f(n) + \int_1^n f(x)\,dx.$$

9. Найдите оценки суммы

$$S_p(n) = 1 + 2^p + \ldots + n^p \text{ при } p > 1$$

и докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

10. Найдите сумму

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Подводя итоги, скажем, что в случае, когда сумма

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

стремится к бесконечности, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ расходится, справедливо асимптотическое выражение $S_n \sim \int\limits_1^n f(x)\,dx$. Для очень многих функций интеграл удается вычислить и, тем самым, получить асимптотику суммы.

Некоторые оценки

Теперь докажем некоторые оценки интегралов, нужные нам для дальнейшего.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, непрерывна, выпукла вверх и положительна на этом

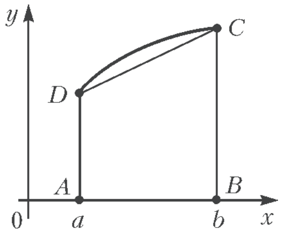


Рис. 3

отрезке. Напомним, что слова «выпукла вверх» означают, что криволинейная трапеция (рис.3) – выпуклое множество. Из выпуклости сразу следует, что площадь криволинейной трапеции больше площади обычной трапеции $ABCD$, т.е. что справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a). \qquad (5)$$

Будем также считать, что наша функция имеет производную во всех точках отрезка $[a;\ b]$. Из существования производной следует, что в каждой точке графика функции существует касательная, причем криволинейная трапеция расположена под касательной (это общее свойство выпуклых вверх функций). В частности, под касательной, проведенной в точке $\left(\frac{a+b}{2};f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Ясно, что площадь обычной трапеции $ABC'D'$ (рис. 4) больше площади криволинейной трапеции, а так как $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ – средняя линия трапеции $ABC'D'$, то справедливо неравенство

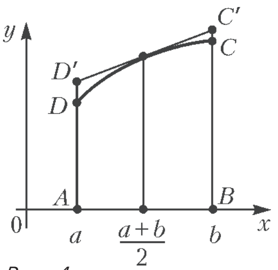


Рис. 4

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \ge \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Случай возрастающей функции *f*

Рассмотрим сумму

$$S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n),$$

где f – возрастающая, непрерывная и выпуклая вверх при $x \ge 1$ функция, имеющая во всех точках производную, т.е. функция, график которой «похож» на графики функций $y=\ln x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ и т.п. Площадь криволинейной трапеции такой функции на отрезке $[1;\ n]$ равна $\int_1^n f(x)\,dx$. Рассмотрим фигуру, образованную трапециями, закрашенными на рисунке 5 голубым цветом. Площадь обычной трапеции на отрезке $[k-1;\ k]$ равна $\frac{f(k-1)+f(k)}{2}$, а сумма площадей всех трапеций равна

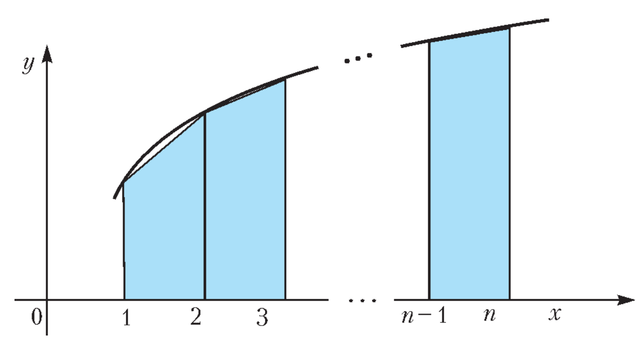


Рис. 5

$$\sigma(n) = \frac{f(1)+f(2)}{2} + \frac{f(2)+f(3)}{2} + \ldots + \frac{f(n-1)+f(n)}{2} =$$

$$= \frac{f(1)}{2} + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}.$$

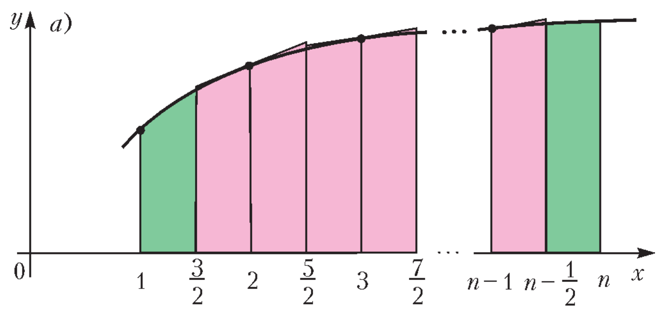
В силу неравенства (5), $\sigma(n)$ меньше площади криволинейной трапеции, т.е.

$$\sigma(n) < \int_1^n f(x)\,dx.$$

Мы докажем, что разность

$$\Delta_n = \int_1^n f(x)\,dx - \sigma(n)$$

стремится к некоторому конечному пределу, и уже отсюда получим оценку суммы $S_n = f(1)+f(2)+\ldots$ $\ldots+f(n)$ с помощью интеграла. Для этого нам понадобится еще одна оценка суммы $\sigma(n)$.



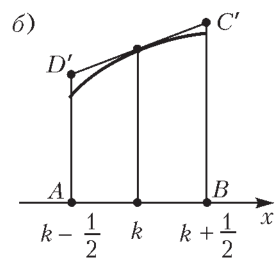


Рис. 6

Рассмотрим криволинейные трапеции на отрезках $\left[k-\frac{1}{2};k+\frac{1}{2}\right]$ при $k = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n-1$ (рис. 6,*а*), проведем при $x = k$ касательную к графику функции и рассмотрим обычную трапецию $ABC'D'$ (рис. 6,*б*). Ее площадь равна $f(k)$.

Теперь заметим, что

$$\int_1^n f(x)\,dx \le$$

$$\le \int_1^{3/2} f(x)\,dx + f(2) + \ldots + f(n-1) + \int_{n-1/2}^n f(x)\,dx.$$

Площадь правого зеленого кусочка, равная $\int_{n-1/2}^n f(x)\,dx$, меньше площади прямоугольника с основанием $\frac{1}{2}$ и высотой $f(n)$, т.е. меньше $\frac{f(n)}{2}$. Итак, для площади всей криволинейной трапеции на отрезке $[1;\ n]$ получаем неравенство

$$\int_1^n f(x)\,dx \le \int_1^{3/2} f(x)\,dx + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2}.$$

Последнее неравенство можно записать так:

$$\int_1^n f(x)\,dx \le$$

$$\le \int_1^{3/2} f(x)\,dx - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} =$$

$$= \int_1^{3/2} f(x)\,dx - \frac{f(1)}{2} + \sigma(n).$$

Итак,

$$\Delta_n = \int_1^n f(x)\,dx - \sigma(n) \le \int_1^{3/2} f(x)\,dx - \frac{f(1)}{2}.$$

Последовательность Δ_n возрастает. Это почти очевидно, поскольку Δ_{n+1} отличается от Δ_n на площадь соответствующей «горбушки».

Из теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что последовательность Δ_n имеет предел. Обозначим этот предел буквой L: $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = L$. Это, в свою очередь, значит, что

$$\int_1^n f(x)\,dx - \sigma(n) = L + \varepsilon_n,$$

где ε_n стремится к нулю.

Перепишем последнее равенство так:

$$\sigma(n) = -L - \varepsilon_n + \int_1^n f(x)\,dx,$$

$$\frac{f(1)}{2} + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} = -L - \varepsilon_n + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Прибавляя к левой и правой частям $\frac{f(1)}{2}$ и $\frac{f(n)}{2}$, получаем

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = C + \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f(x)\,dx + \alpha_n, \tag{7}$$

где $C = \frac{f(1)}{2} - L$ – константа, а $\alpha_n \to 0$. Мы получили выражение суммы S_n через интеграл с точностью до величины, стремящейся к нулю.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда

$$S_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} =$$

$$= C + \frac{1}{2}\sqrt{n} + \int_1^n \sqrt{x}\,dx + \alpha_n = C' + \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \alpha_n,$$

где C' – некоторая константа. При этом

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

Аналогично,

$$\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \ldots + \sqrt[3]{n} \sim \frac{3}{4}n\sqrt[3]{n}.$$

Асимптотика факториала

Числа $n!$ с увеличением n растут очень быстро. Заметим, что $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n$, а функция ln «устроена» так же, как функция, для которой справедлива формула (7). Запишем соответствующее равенство:

$$\ln n! = C + \frac{1}{2}\ln n + \int_1^n \ln x\,dx + \alpha_n.$$

Нетрудно доказать, что

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1.$$

Следовательно

$$\ln n! = C_1' + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + \alpha_n,$$

откуда

$$n! = e^{C_1'}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} = K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \gamma_n, \tag{8}$$

где $K = e^{C_1'}$, а $\gamma_n = e^{\alpha_n}$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Пока мы не знаем, чему равна константа K. Во всяком случае, уже ясен характер роста чисел $n!$. А именно,

$$n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{8'}$$

Найти эту константу нам поможет еще одна замечательная формула, которую мы скоро докажем.

Формула Валлиса [1]

Для дальнейшего нам придется вспомнить некоторые формулы анализа.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке $[a;\ b]$. По формуле для производной произведения,

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[a;\ b]$:

$$\int_a^b \big(u(x)v(x)\big)'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Это значит, что

$$\int_a^b v'(x)u(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Ее обычно записывают так (учитывая, что $f'(x)\,dx = df$):

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \text{ где } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[1] Джон Валлис (1616 – 1703) – английский математик, один из основателей Лондонского Королевского общества.

Этот интеграл – площадь криволинейной трапеции функции $y=\sin^n x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $\sin x dx = d(-\cos x)$, то при $n \ge 2$ получим

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx =$$

$$= (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n,$$

откуда $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$, или $J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$. Мы получили рекуррентную формулу, выражающую J_n через J_{n-2}. Продолжая этот процесс, получим

$$J_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}J_{n-4},$$

$$J_{n-4} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)}J_{n-6}$$

и т.д.

Если $n = 2k$ четно, то этот процесс будет продолжаться до $n = 0$, и мы получим равенство

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}J_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(поскольку $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, а по определению $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$, $(2k)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k$). Аналогично, при $n = 2k+1$

$$J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}J_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

так как $J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$.

Подготовительная работа закончена. Запишем при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ очевидные неравенства

$$\sin^{2n-1} x \ge \sin^{2n} x \ge \sin^{2n+1} x$$

и, соответственно,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx \ge \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \ge \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx.$$

Это значит, что

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \ge \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \ge \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

или (разделим все неравенства на правую часть)

$$\frac{2n+1}{2n} \ge \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{\left((2n)!!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \ge 1.$$

Если $n\to+\infty$, левая часть стремится к 1 и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{\left((2n)!!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2(2n+1). \tag{9}$$

Это и есть удивительная формула Валлиса для числа π. Перепишем ее так:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{2n+1}. \tag{9'}$$

Формула Стирлинга [2]

Теперь мы в состоянии найти константу K в формулах (8) и (8′). Запишем формулу (9′) в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}}\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 1$ при $n\to\infty$. Заметим, что двойные факториалы выражаются через обычные:

$$(2n)!! = 2^n\cdot n!,\ (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}\varepsilon_n. \tag{10}$$

Но, по формуле (8),

$$n! = K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\gamma_n,\ (2n)! = K\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\gamma_{2n}, \tag{11}$$

где величины γ_n и γ_{2n} стремятся к 1 при $n\to\infty$. Подставляя выражения (11) в формулу (10), получим после упрощений

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2n}\cdot K^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\gamma_n^2}{K\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n+1}\gamma_{2n}}\varepsilon_n = \frac{Kn\gamma_n^2}{\sqrt{4n^2+2n}\,\gamma_{2n}}\varepsilon_n.$$

При $n\to\infty$ правая часть имеет предел, равный

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Kn\gamma_n^2}{\sqrt{4n^2+2n}\,\gamma_{2n}}\varepsilon_n = \frac{K}{2}.$$

Итак,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{K}{2},\ K = \sqrt{2\pi}.$$

---

[2] Джеймс Стирлинг (1692 – 1770) – шотландский математик.

Окончательно получаем

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \varepsilon_n , \qquad (12)$$

где $\varepsilon_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Формула (12) и есть знаменитая формула Стирлинга. Она как бы соединяет различные разделы математики: теорию чисел – функция $n!$, анализ – число e и геометрию – число π.

Отметим еще, что более кропотливое исследование позволяет уточнить поведение последовательности ε_n, а именно:

$$\varepsilon_n = e^{\frac{Q_n}{12n}}, \text{ где } |Q_n| < 1 ,$$

так что формулу Стирлинга можно использовать для приближенных вычислений и оценок. Например, рассмотрим число C_{2n}^n. Изначально про него мы можем сказать только, что оно очень большое при больших n. Попробуем найти асимптотическое выражение, подставляя выражения факториалов по формуле Стирлинга:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\varepsilon_{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 \varepsilon_n^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\alpha_n ,$$

где $\alpha_n \to 1$ при $n \to \infty$. Окончательно,

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} .$$

Такого рода рассуждения часто встречаются в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Упражнения

11. Найдите асимптотические выражения для $(2n)!!$, $(2n-1)!!$ и $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$.

12. Колоду карт, состоящую из 52 карт, наудачу разделяют на 2 части по 26 карт. Какова вероятность того, что в обеих частях окажется по равному числу красных и черных карт?

Мыльные пузыри в фотографиях

(Начало см. на с. 2)

Заканчивая разговор о геометрической оптике мыльного пузыря, обратим внимание на то, что на фотографиях есть еще много загадочного. Например: почему размер изображения, получаемого в результате многократных отражений, уменьшается с увеличением числа отражений? Кроме того, остались нерешенными некоторые экспериментальные проблемы. Пузыри – очень подвижные «фотомодели», поэтому, для того чтобы получить желаемое изображение хорошей четкости, нам приходилось делать большое число фотографий в безветренную погоду, после чего выбирать из них лучшие. Конечно, было бы удобнее, если бы пузырь удалось зафиксировать в какой-либо точке пространства, не нарушив его сферичности. Сделать это нам пока не удалось. Может быть, кому-либо из читателей удастся решить эту проблему и сделать фотографии пузырей с еще большим количеством изображений.

Физическая оптика мыльного пузыря

Почему изображения солнца и вспышки на фотографиях пузырей цветные? Почему у каждого изображения свой цвет? Можно ли предсказать последовательность цветов? Попробуем ответить на эти вопросы.

Солнечный свет, попадающий на мыльный пузырь, содержит весь цветовой спектр. Совокупность составляющих солнечный свет лучей разных цветов воспринимается нашим глазом как белый свет. Интенсивность лучей разных цветов задается солнцем. Если нарушить баланс интенсивностей составляющих солнечный свет лучей разных цветов, то совокупный луч станет цветным. Например, если почему-то усилится интенсивность лучей красного цвета, то совокупный луч окрасится в красный цвет. При падении солнечного луча на мыльную пленку некоторая его часть проходит через пленку, а некоторая отражается. Благодаря явлению *интерференции* пропорция, в которой происходит такое деление луча, зависит от длины волны света, или, другими словами, от его цвета. Заметим, что если поглощение и рассеяние света на пленке незначительно, то сумма прошедшего и отраженного лучей будет снова белой.

Обсуждаемые нами изображения солнца на фотографиях получены в результате ряда отражений света от внутренней поверхности пузыря. Каждое прохождение и отражение от пленки приводит к окрашиванию луча. Поскольку угол падения луча на пленку при путешествии его внутри мыльного пузыря один и тот же, каждое дополнительное отражение должно приводить к увеличению интенсивности окраски изображения.

Фотографии пузырей подтверждают это. Действительно, цвет изображения вспышки на фотографиях наиболее насыщен на изображениях, полученных в результате большого числа отражений от внутренней поверхности пузыря. Напомним, что изображениям вспышки, полученным в результате большего числа отражений, соответствуют дуги большего радиуса.

Чтобы разобраться с последовательностью цветов изображений солнца и вспышки на фотографиях, достаточно вспомнить раздел не геометрической, а физической оптики, а именно – интерференцию света на тонких пленках. Но дабы не делать статью более громоздкой, оставим решение этой задачи читателям. Заметим только, что это решение не требует знаний, превышающих школьный курс физики.

Надеемся, что возможность сравнить результат рассуждений с наблюдением доставит читателям удовольствие.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2015» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2389» или «Ф2395». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2389–М2395 предлагались на XXXVI Турнире городов.

Задачи М2389–М2395, Ф2395–Ф2402

М2389. Дано $2n+1$ чисел (n – натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, …, два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел?

И.Акулич

М2390. График квадратного трехчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X, Z, а ось ординат – в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ.

Б.Френкин

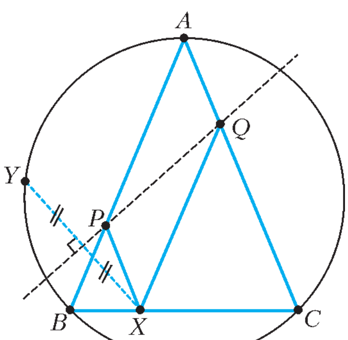


Рис. 1

М2391. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, а на сторонах AB и AC – соответственно точки P и Q таким образом, что $APXQ$ – параллелограмм (рис.1). Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, попадает на описанную окружность треугольника ABC.

А.Гаркавый, Ф.Ивлев

М2392. а) В таблицу $2\times n$ (где $n>2$) вписаны числа. Суммы во всех n столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

А.Шаповалов

М2393. Дано натуральное число a. Докажите, что любое натуральное число n можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее $10a$, так, чтобы десятичная запись произведения начиналась с a.

Е.Бакаев

М2394. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император – нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И.Митрофанов

М2395. Как известно, если у четырехугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырехугольник – квадрат.

А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид – куб? (Кубоид – это многогранник, у которого 6 четырехугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра.)

М.Евдокимов

Ф2395. Небольшой кубик массой $m = 0{,}1$ г надет на тонкую спицу, вдоль которой он может перемещаться без трения (рис.2). Спицу жестко закрепляют над плоским вращающимся с угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ рад/с диском радиусом $R = 10$ см так, что она находится на расстоянии $h = 6$ см от центра диска и расположена параллельно поверхности диска. Кубик прижат к диску силой $F = 10$ Н, перпендикулярной плоскости диска. Коэффициент трения между кубиком и диском $\mu = 0{,}3$. В начальный момент кубик находится вблизи края диска. Через какое время кубик соскользнет с диска? Силой тяжести можно пренебречь.

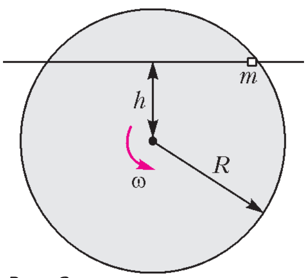


Рис. 2

А.Бычков

Ф2396. В известной игре на гладкой горизонтальной поверхности сталкиваются две одинаковые по размерам (их радиусы равны R) и по массе (M) шашки, одна из которых до столкновения покоится, а другая движется поступательно со скоростью $2v$. Прицельный параметр – минимальное расстояние между линией, вдоль которой до столкновения движется центр одной из шашек, и центром второй шашки – равен h (при $h < D$ шашки соударяются). Известно, что при $h = 0$ во время столкновения шашки обмениваются скоростями, т.е. происходит абсолютно упругий лобовой удар. Коэффициент трения шашки о шашку равен μ. Как зависят угловые скорости, приобретенные шашками после удара, от прицельного параметра h? Какими будут скорости центров шашек после удара? Момент инерции шашки относительно вертикальной оси симметрии равен I.

В.Чапаев

Ф2397. В настоящее время в мире широко используются висячие мосты (рис.3). Несущая конструкция вися-

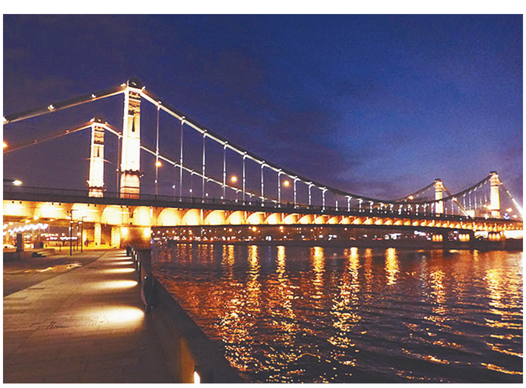


Рис. 3

чего моста представляет собой гибкий элемент, его называют кабелем или цепью, закрепленный на прочных опорах – пилонах. Пролет моста подвешен к цепи на вертикальных тросах. Поскольку масса пролета много больше массы цепи, вертикальные тросы расположены близко друг к другу (цепь можно считать плавной кривой), а их длины подобраны так, что силы натяжения всех тросов одинаковы. Найдите форму цепи, т.е. уравнение цепи в системе координат, изображенной на рисунке 4.

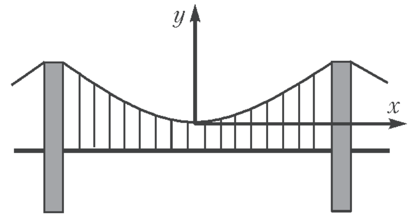


Рис. 4

С.Муравьев

Ф2398. Две пластинки имеют одну и ту же длину L, ширину H и толщину d, причем $L \gg H \gg d$. Пластинки сделаны из разных металлов, склеены и образуют одну так называемую биметаллическую пластинку толщиной $2d$. Металлы имеют разные коэффициенты теплового расширения α_1 и α_2 и разные модули Юнга E_1 и E_2. При некоторой температуре, например комнатной, биметаллическая пластинка прямая, а при повышении температуры на Δt градусов она искривляется. До какой температуры нужно нагреть биметаллическую пластинку, чтобы она образовала кольцо?

С.Варламов

Ф2399. Оцените собственное давление жидкой воды при температуре 27 °С, т.е. давление, которым вещество само себя сжимает, удерживаясь в конденсированном состоянии. Для этого предположите, что сосуд с жесткими стенками был заполнен водой, а затем все молекулы воды перестали взаимодействовать друг с другом, уменьшились до размеров точек и взаимодействуют только со стенками сосуда, отскакивая от них при абсолютно упругих ударах.

С.Бар

Ф2400. Тонкая диэлектрическая нить образует геометрическую фигуру, состоящую из полуокружности радиуса R и двух лучей (рис. 5). Нить равномерно заряжена, заряд единицы длины нити равен τ. Найдите напряженность электрического поля, создаваемого нитью в точке O (центр полуокружности).

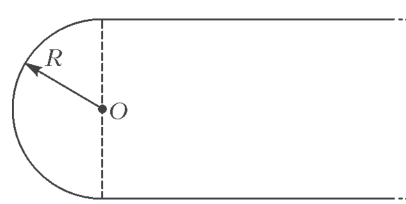


Рис. 5

А.Бычков

Ф2401. В сеть (220В, 50Гц) включена электрическая схема с двумя катушками индуктивности, двумя ключами и тремя идеальными приборами, показывающими эффективные значения параметров (рис. 6). Когда ключ K_1 нахо-

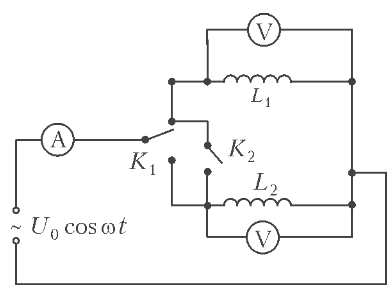


Рис. 6

дится в верхнем положении, а ключ K_2 разомкнут, амперметр показывает ток $I_1 = 1$ А, верхний вольтметр показывает напряжение $U = 220$ В, а нижний вольтметр показывает напряжение $U_1 = 55$ В. Если ключ K_1 перевести в нижнее положение, оставив K_2 разомкнутым, то амперметр показывает $I_2 = 4$ А, нижний вольтметр показывает напряжение $U = 220$ В. Какое напряжение U_2 в этом случае показывает верхний вольтметр? Что будут показывать все приборы, если ключ K_2 перевести в замкнутое положение?

Е.Паркевич

Ф2402. К потолку на шарнире подвешено плоское зеркало, представляющее собой тонкую прямоугольную пластину длиной L. Горизонтальная ось шарнира и одна сторона прямоугольника (зеркала) совпадают. На вертикальной стене, находящейся на расстоянии d от оси шарнира, сидит оса. Расстояние от потолка до осы равно h. Зеркало отклоняют от положения равновесия в направлении от стены на угол α_0, удерживают его, а затем отпускают. Каковы скорость v и ускорение a изображения осы в момент времени, когда плоскость зеркала составляет угол φ с вертикалью? Трения нет.

Д.Ягнятинский

Решения задач М2374 – М2380, Ф2380–Ф2387

М2374. *После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, деленная на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?*

Ответ: 5.

Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек и рейтинг был целым числом x. Значит, сумма баллов стала равна nx. Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx + y = (n+1)(x-1)$, откуда $y = x - n - 1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1, значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8.

С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем – 4 и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при одном проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий – 6, четвертый – 4, пятый – 2, а шестой – 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

О.Дмитриев, Р.Женодаров

М2375. *Найдите количество действительных решений уравнения*

$$(x+2)(x+4)\ldots(x+2014) = (x+1)(x+3)(x+5)\ldots(x+2015).$$

Ответ: 1008.

В левой части уравнения многочлен $f(x) = (x+2)(x+4)\ldots(x+2014)$ степени 1007, а в правой части – многочлен $g(x) = (x+1)(x+3)(x+5)\ldots(x+2015)$ степени 1008. Уравнение $f(x) - g(x) = 0$ имеет степень 1008, оно не может иметь больше 1008 корней. Теперь докажем, что количество корней не меньше 1008. Подстановка показывает, что $f(-3) < 0$, и далее $f(-5) > 0$, $f(-7) < 0$, …, т.е. в последовательности $f(-3)$, $f(-5)$, $f(-7)$, … положительные и отрицательные числа чередуются. Аналогично, $g(-2) < 0$, $g(-4) > 0$, $g(-6) < 0$ и т.д. Значит, $f(-2) - g(-2) = -g(-2) > 0$, $f(-3) - g(-3) = -f(-3) < 0$, $f(-4) - g(-4) = -g(-4) < 0$, $f(-5) - g(-5) = -f(-5) > 0$ и т.д. Выходит, разности $f(-2k) - g(-2k)$ и $f(-2k-1) - g(-2k-1)$ имеют разные знаки для $k = 1, 2, \ldots, 1007$. Таким образом, на каждом из интервалов $(-2k-1; -2k)$ для $k = 1, 2, \ldots, 1007$ уравнение $f(x) - g(x)$ имеет хотя бы по одному корню.

Кроме того, $f(-1) - g(-1) = f(-1) > 0$. Но при больших положительных x выполнено $f(x) - g(x) < 0$ (это следует, например, из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{1008}} = 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^{1008}} = 1$). Следовательно, на интервале $(-1; +\infty)$ уравнение $f(x) - g(x) = 0$ имеет хотя бы один корень. Итого, мы нашли не менее 1008 корней.

П.Кожевников

М2376. *В остроугольном треугольнике ABC точка K – середина AC (рис.1). На сторонах AB и BC как на основаниях внутрь треугольника построены равнобедренные треугольники ABM и BCN так, что $AM = BM$, $\angle AMB = \angle AKB$ и $BN = CN$, $\angle BNC = \angle BKC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MNK, касается стороны AC.*

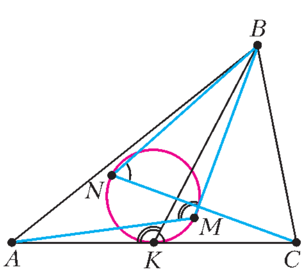


Рис. 1

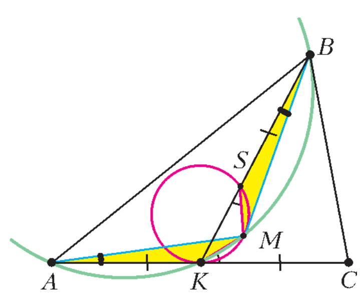


Рис. 2

Отметим на медиане BK точку S такую, что $BS = AK = CK$ (рис.2). Из равенства углов $\angle MAK = \angle MBK$ (а они равны, потому что точки A, B, M, K лежат на одной окружности) следует равенство треугольников AKM и BSM (эти треугольники получаются друг из друга поворотом вокруг точки M). Из равенства треугольников следует равенство углов $\angle KSM = \angle MKC$, поэтому окружность, описанная около треугольника KSM, касается прямой AC. Аналогично доказывается, что окружность, описанная около треугольника KSN, касается прямой AC.

Но окружность, проходящая через точки K и S и касающаяся прямой AC, единственная. Значит, точки K, S, M, N лежат на одной окружности, которая касается прямой AC в точке K.

Замечания. Отметим связь этой задачи с интересными сюжетами. Для треугольника AKB точка M – середина дуги AKB описанной окружности. Если откладывать на лучах AK и BK равные отрезки AX и BY, то точки X, Y, K, M будут лежать на одной окружности (см., например, статью А.Полянского «Воробьями по пушкам!» из «Кванта» №2 за 2012 г.).

В нашем случае $Y = S$, $X = K$, что соответствует касанию окружности с прямой AC. Несколько другой путь решения состоит в следующем. Нетрудно заметить, что KM и KN – внешние биссектрисы для треугольников ABK и BCK, поэтому $\angle MKN = 90°$. Для доказательства требуемого касания достаточно доказать, что $\angle MKC = \angle MNK$ или $\angle MKB = \angle MNK$, что эквивалентно $MN \perp BK$. Согласно замечательной задаче, которая была в «Задачнике «Кванта» под номером М1000, проекция точки M на BK делит пополам длину ломаной AKB. Аналогично, проекция точки N на BK делит пополам длину ломаной BKC. Так как $AK = KC$, эти проекции совпадают, что и требуется.

А.Антропов, П.Кожевников

М2377. *Для 25 натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$ вычисляют значения $S_1 = n_1 + n_2^{n_3}$, $S_2 = n_2 + n_3^{n_4}$, … …, $S_{25} = n_{25} + n_1^{n_2}$. Оказалось, что все числа $S_1, \ldots, S_{25}$ простые. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть среди чисел $n_1, \ldots, n_{25}$?*

Ответ: 13.

Примером является набор чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$, в котором $n_i = 1$ для всех нечетных i, и $n_{2j} = p_j - 1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ – различные нечетные простые числа. Тогда $S_{25} = 2$, $S_1 = S_2 = p_1$, $S_3 = S_4 = p_2$, … …, $S_{23} = S_{24} = p_{12}$.

Для завершения решения достаточно доказать, что среди чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$ не более 12 чисел, больших 1. Расставим для удобства данные числа $n_1, \ldots, n_{25}$ по кругу по часовой стрелке. Так как 25 – нечетное число, найдутся два соседних числа одной четности; для определенности, пусть это числа n_1 и n_2. Тогда число S_1 четно, значит $S_1 = 2$, что возможно лишь при $n_1 = n_2 = 1$. Значит, среди $n_1, \ldots, n_{25}$ обязательно есть числа, равные 1.

Предположим, что среди чисел $n_1, \ldots, n_{25}$ не менее 13 чисел, больших 1. Тогда найдется пара соседних чисел, больших 1.

Рассмотрим эту пару и пойдем от нее против часовой стрелки, пока не встретим число $n_i = 1$. В результате подряд по часовой стрелке идут числа 1, b, c, где $b > 1$ и $c > 1$. Число b четно, иначе $S_i = 1 + b^c$ четно и больше чем 2. Значит, c нечетно, иначе $S_{i+1} = b + c^d$ четно и больше чем 2. Но тогда $S_i = 1 + b^c = (1+b)\left(1 - b + \ldots + b^{c-1}\right)$, т.е. S_i делится на 1 + b и больше, чем 1 + b, – противоречие.

В.Сендеров

М2378. *На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и n различных векторов. Докажите, что можно выбрать точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$, удовлетворяющие следующим двум условиям: (1) среди n векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, … …, $\overrightarrow{A_nB_n}$ каждый из данных векторов встречается ровно по разу; (2) расстояние между точками B_i и B_j не меньше, чем между точками A_i и A_j для всех пар индексов $1 \le i \le j \le n$.*

Зафиксируем точку O, обозначим через $\vec{x}_i$ радиус-векторы $\overrightarrow{OA_i}$. Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ – перестановка данных векторов, для которой сумма скалярных произведений $S = (\vec{x}_1, \vec{v}_1) + (\vec{x}_2, \vec{v}_2) + \ldots + (\vec{x}_n, \vec{v}_n)$ наибольшая возможная. Отложим от точек A_i векторы $\vec{v}_i$ и обозначим B_i концы векторов. Покажем, что полученные точки B_i удовлетворяют условию (2).

Предположим, что нашлась пара индексов i, j ($1 \le i < j \le n$), для которой $B_iB_j < A_iA_j$. Имеем

$$\left|\overrightarrow{B_iB_j}\right|^2 < \left|\overrightarrow{A_iA_j}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{v}_j + \vec{x}_j - \vec{x}_i - \vec{v}_i\right|^2 < \left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^2 + 2\left(\vec{x}_j - \vec{x}_i, \vec{v}_j - \vec{v}_i\right) + \left|\vec{v}_j - \vec{v}_i\right|^2 < \left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{x}_j - \vec{x}_i, \vec{v}_j - \vec{v}_i\right) < 0 \Rightarrow \left(\vec{x}_j, \vec{v}_j\right) + \left(\vec{x}_i, \vec{v}_i\right) <$$

$$< \left(\vec{x}_j, \vec{v}_i\right) + \left(\vec{x}_i, \vec{v}_j\right).$$

Но тогда если в перестановке $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ поменять местами векторы $\vec{v}_j$ и $\vec{v}_i$, то сумма S увеличится. Противоречие.

Ф.Ивлев, П.Кожевников

М2379. *О выпуклом шестиугольнике ABCDEF известно, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке M и, кроме того, треугольники ABM, BCM, CDM, DEM, EFM и FAM – остроугольные. Докажите, что центры окружностей, описанных около этих треугольников, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда четырехугольники ABDE, BCEF и CDFA имеют равные площади.*

Пусть $M_a, M_b, M_c, M_d, M_e, M_f$ – середины отрезков AM, BM, CM, DM, EM, FM соответственно. Положим $\angle BMC = \alpha$, $\angle CMD = \beta$, $\angle DME = \gamma$. Пусть $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ – центры окружностей, описанных около треугольников ABM, BCM, CDM, DEM, EFM и FAM соответственно. Заметим, что точки O_1 и O_2 находятся на серединном перпендикуляре к отрезку BM, а точки O_4 и O_5 – на серединном перпендикуляре к отрезку EM. Поэтому $O_1O_2 \parallel O_4O_5$ (рис.1).

Предположим, что точки $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ лежат на одной окружности. Тогда $O_1O_2O_4O_5$ – вписанная трапеция, значит, $O_1O_4 = O_2O_5$. Так как BE – высота равнобокой трапеции, диагонали O_1O_4 и O_2O_5 составляют равные углы с прямой BE. Аналогичные утверждения докажем для диагонали O_3O_6. Возьмем на плоскости векторы $\overrightarrow{T_1T_4} = \overrightarrow{O_1O_4}$, $\overrightarrow{T_2T_5} = \overrightarrow{O_2O_5}$,

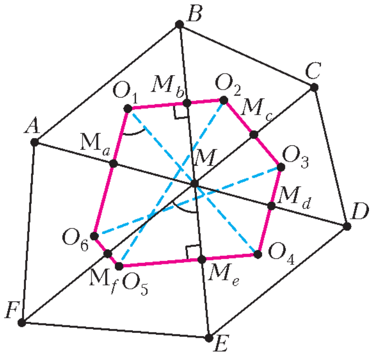


Рис. 1

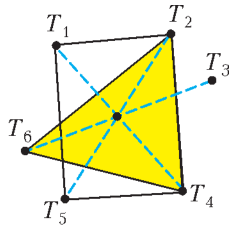


Рис. 2

$\overrightarrow{T_3T_6} = \overrightarrow{O_3O_6}$ так, чтобы отрезки T_1T_4, T_2T_5 и T_3T_6 имели общую середину (рис.2). Тогда $T_1T_4 = T_2T_5$, значит, $T_1T_2T_4T_5$ – прямоугольник. Направление прямой T_2T_4 составляет равные углы с T_1T_4 и T_2T_5, поэтому $T_2T_4 \parallel BE$. Так как $\overrightarrow{T_2T_4}$ – проекция вектора $\overrightarrow{T_1T_4}$ на прямую T_2T_4, то $T_2T_4 = M_bM_e$. Аналогично, $T_2T_6 = M_cM_f$. Тогда

$$S_{BCEF} = \frac{1}{2} BE \cdot CF \cdot \sin\alpha =$$

$$= 2M_bM_e \cdot M_cM_f \cdot \sin\alpha = 2T_2T_4 \cdot T_2T_6 \cdot \sin\alpha = 4S_{T_2T_4T_6}.$$

Аналогично доказываем, что каждая из площадей S_{CDFA}, S_{ABDE} равна $4S_{T_2T_4T_6}$.

Наоборот, предположим, что $S_{ABDE} = S_{BCEF} = S_{CDFA}$. Тогда $AD \cdot BE \cdot \sin\gamma = CF \cdot AD \cdot \sin\beta = BE \cdot CF \cdot \sin\alpha$, откуда $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{BE}{\sin\beta} = \frac{CF}{\sin\gamma}$. Значит, в треугольнике с углами α, β, γ (он существует, так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$) стороны относятся как $AD : BE : CF$. Отложим векторы $\overrightarrow{O_4X} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{O_4Y} = \overrightarrow{EB}$ (рис.3). Тогда в треугольнике

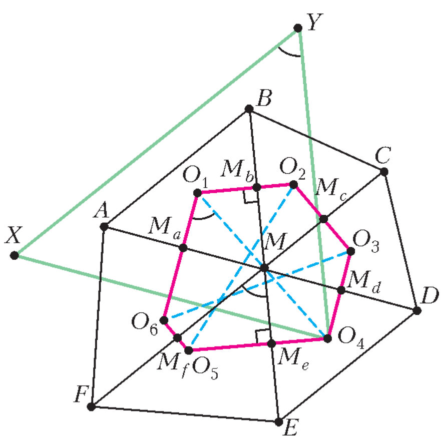


Рис. 3

O_4XY угол O_4 равен γ, а прилежащие стороны относятся как $AD : BE$, значит, этот треугольник подобен треугольнику с углами α, β, γ, тем самым $\angle XYO_4 = \alpha$. Далее, $O_1O_6 \perp O_4X$, а расстояние от O_4 до прямой O_1O_6 равно $M_dM_a = \frac{DA}{2} = \frac{O_4X}{2}$, значит, O_1O_6 – серединный перпендикуляр к отрезку O_4X. Аналогично, O_1O_2 – серединный перпендикуляр к отрезку O_4Y. Следовательно, O_1 – центр описанной окружности треугольника O_4XY. Отсюда

$$\angle O_6O_1O_4 = \frac{1}{2} XO_1O_4 = \angle XYO_4 = \alpha.$$

Но

$$\angle O_6O_5O_4 = \angle M_fO_5M_e = 180° - \angle FME = 180° - \alpha.$$

Таким образом,

$$\angle O_6O_1O_4 + \angle O_2O_5O_4 = 180°,$$

поэтому точки O_1, O_4, O_5, O_6 лежат на одной окружности ω. Аналогично доказываем, что O_2, O_1, O_5, O_6 лежат на одной окружности, значит, O_2 лежит на той же окружности ω. Наконец, доказываем, что точки O_3, O_2, O_1, O_6 лежат на одной окружности, поэтому O_3 также лежит на ω.

Замечание. Условие выпуклости шестиугольника и остроугольности треугольников *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *EFM* и *FAM* включены в текст задачи для того, чтобы фиксировать расположение точек на чертеже. На самом деле утверждение задачи будет верно для любого шестиугольника *ABCDEF*, для которого три диагонали *AD*, *BE*, *CF* находятся внутри шестиугольника и пересекаются в одной точке *M*. Вырожденным частным случаям является треугольник *ACE*, в котором проведены медианы *AD*, *CF*, *EB*, пересекающиеся в точке *M*: тогда центры описанных окружностей треугольников *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *EFM* и *FAM* лежат на окружности, которая называется окружностью Ламуна.

Н.Седракян

M2380. *Дано натуральное число $n \geq 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенные в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?*

Ответ: $2n$.

Сначала мы предъявим пример покраски клеток в $2n - 1$ цветов так, чтобы не было ни одной требуемой разноцветной четверки клеток. Покрасим все клетки первой горизонтали и первой вертикали в $2n - 1$ различный цвет, причем клетку на их пересечении покрасим в первый цвет. Оставшиеся клетки также покрасим в первый цвет (на рисунке 1 $n = 5$). Тогда нетрудно понять, что из четырех клеток на пересечении любых двух столбцов и двух строк максимум две будут иметь цвет, отличный от первого. Значит, требуемой четверки клеток не найдется.

1	2	3	4	5
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1

Рис. 1

Осталось доказать, что при $k \geq 2n$ требуемая четверка обязательно найдется. Рассмотрим раскраску клеток в k

или более цветов. Переформулируем задачу следующим образом. Рассмотрим *двудольный граф*, вершины которого соответствуют горизонталям и вертикалям доски (всего $2n$ вершин). Если клетка на пересечении некоторых горизонтали и вертикали покрашена в цвет c, то соединим вершины, соответствующие этим горизонтали и вертикали, ребром цвета c. *Разноцветным циклом* будем называть цикл, в котором нет двух ребер одного цвета. Нам требуется доказать, что в построенном графе найдется разноцветный цикл из 4 ребер.

Сначала докажем, что найдется хотя бы один разноцветный цикл (возможно, более чем из 4 ребер). Выберем по одному ребру каждого цвета – всего не менее $2n$ ребер, причем все разных цветов. Остальные ребра временно сотрем. В полученном графе количество ребер не меньше количества вершин. Как известно, в таком графе найдется цикл. (Это можно доказать следующим образом. Если в графе есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро, то можно удалить ее вместе с этим ребром и перейти к графу с меньшим числом вершин. Пусть из любой вершины выходит не менее двух ребер. Тогда можно выйти из одной вершины по ребру и далее двигаться по ребрам, каждый раз выходя из вершины по еще не пройденному ребру. Рано или поздно мы придем в вершину, в которой уже были, т.е. получим цикл.)

Теперь найдем в исходном графе кратчайший разноцветный цикл. Пусть это цикл $a_1b_1a_2b_2\ldots a_sb_sa_1$ из $2s$ ребер, где a_i – вершины, соответствующие горизонталям доски, а b_j – вершины, соответствующие вертикалям (рис.2). Докажем, что этот цикл состоит из 4 ребер, т.е. $s = 2$. Пусть, напротив, $s > 2$. Рассмотрим ребро b_2a_1. Если его цвет отличен от цвета каждого из

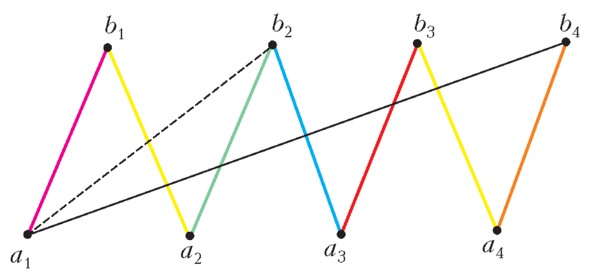


Рис. 2

ребер a_1b_1, b_1a_2 и a_2b_2, то $a_1b_1a_2b_2a_1$ – разноцветный цикл из 4 ребер; противоречие. Иначе, цвет ребра b_2a_1 отличен от цвета каждого из ребер $b_2a_3, a_3b_3, \ldots$ $\ldots, a_kb_k, b_ka_1$, тем самым, цикл $a_1b_2a_3b_3\ldots a_kb_ka_1$ из $2k-2$ ребер является разноцветным; противоречие.

П.Кожевников, Д.Храмцов

Ф2380. *Две утки, стартуя одновременно, не торопясь переплывают канал одинаковой в любом месте ширины, двигаясь с постоянными, но разными скоростями (рис.1). Скорость течения воды в канале тоже постоянна и равна v. Черными линиями на рисунке 2 показаны берега канала, а красными линиями для некоторого момента времени показано рас-*

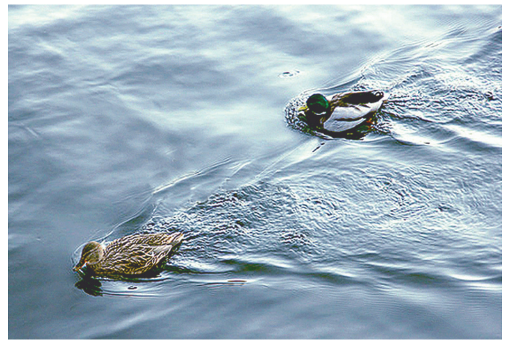


Рис. 1

положение границ областей существования волн, которые своими движениями создали на поверхности воды утки. Линии этих границ образуют одинаковые углы φ независимо от величин скоростей движения уток. Обе утки «причалили» к противоположному берегу в одном месте. Каковы скорости уток относительно воды?

Примечание. Известно, что $\varphi \approx 39°$ при движении с постоянными скоростями по глубокой воде лодок, кораблей, уток – любых объектов.

Пусть расстояние между берегами канала равно $3L$. Двигаясь в течение одного и того же промежутка времени, медленная утка преодолела только $1/3$ ширины канала, а быстрая утка проплыла $2/3$ ширины канала (см. рис.2). Значит, составляющие скоростей

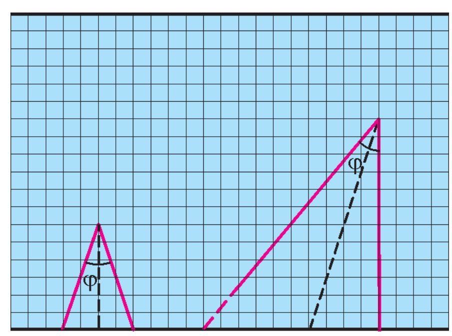


Рис. 2

уток, поперечные к скорости реки, относятся как 2:1. При этом медленная утка по отношению к воде движется строго перпендикулярно берегам. Это следует из того, что область, занятая на поверхности воды волнами, созданными этой уткой, представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого совпадает с берегом канала. Обозначим скорость медленной утки u_1, а скорость быстрой утки u_2. Начальное расстояние между утками на берегу равно $2L$. Если бы не было течения воды, то на противоположном берегу расстояние между утками было бы равно

$$l = 2L + 3L\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Промежуток времени между моментами «причаливания» уток к противоположному берегу равен

$$\Delta t = \frac{2L}{u_1} - \frac{L}{2u_1} = \frac{3}{2}\frac{L}{u_1}.$$

За это время река «снесет» медленно движущуюся утку на расстояние l, т.е. выполняется равенство

$$l = v\Delta t \text{, или } 2L + 3L\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = v\cdot\frac{3}{2}\frac{L}{u_1}.$$

Отсюда находим

$$u_1 = \frac{3}{2}\frac{v}{2+3\operatorname{tg}(\varphi/2)}.$$

Поскольку одна из границ области, занятой волнами, созданными быстро движущейся уткой, перпендикулярна берегам канала, то

$$u_2 = \frac{2u_1}{\cos(\varphi/2)} = \frac{3v}{2\cos(\varphi/2)+3\sin(\varphi/2)}.$$

Д.Уткин

Ф2381. *Два висящих в воздухе груза с массами m (верхний) и M (нижний) скреплены резинкой. Верхний груз удерживается на месте двумя резинками, одна из которых горизонтальна, а вторая составляет с вертикалью угол α. Система находится в равновесии, все резинки легкие. В некоторый момент одна из резинок порвалась. С какими ускорениями двигались грузы сразу после этого?*

Порваться могут, как ясно из условия, три разные резинки. До обрыва нижняя резинки была натянута с силой Mg, резинка, составляющая углом α с вертикалью, была натянута с силой $g(M+m)/\cos\alpha$, а горизонтальная резинка была натянута с силой $g(M+m)\sin\alpha/\cos\alpha = g(M+m)\operatorname{tg}\alpha$.

Если порвалась первая резинка, то нижний груз начнет двигаться с ускорением $a_M = g$ вниз, а верхний груз под действием оставшихся целыми резинок придет в движение с ускорением $a_m = g\dfrac{M}{m}$, направленным вверх.

Если порвалась третья резинка, то нижний груз сразу после обрыва резинки будет иметь нулевое ускорение: $a_M = 0$, так как вертикальные составляющие сил натяжения оставшихся целыми резинок не могут мгновенно измениться. А верхний груз придет в движение с ускорением $a_m = g\left(\dfrac{M}{m}+1\right)\operatorname{tg}\alpha$, направленным горизонтально.

Если порвалась вторая резинка, то нижний груз останется на месте, т.е. его ускорение будет равно нулю: $a_M = 0$. Верхний же груз будет двигаться с ускорением $a_m = g\dfrac{(M/m)+1}{\cos\alpha}$, направленным вниз под углом α к вертикали, т.е. вдоль направления, которое имела до разрыва эта резинка.

А.Простов

Ф2382. *Стальная проволока с линейным распределением массы λ = 0,1 кг/м натянута между двумя одинаковыми высотными домами, расстояние между которыми L = 100 м. Концы проволоки жестко закреплены. При температуре 0 °C и отсутствии ветра «провис» проволоки (разность уровня крепления концов проволоки и уровня самой нижней точки провода между домами) равен $H = 0{,}5$ м $\ll L$.*

1) С какой силой натянута проволока?

2) Какой будет длина этой проволоки, если ее при той же температуре уложить без натяжения на горизонтальную поверхность? Модуль Юнга стали $E = 10^{11}$ Па.

3) Как связаны друг с другом «провис» проволоки, расстояние между точками крепления ее концов и длина проволоки в нерастянутом состоянии?

4) На сколько отличаются силы натяжения этой проволоки летом при температуре +30 °C и зимой при температуре −20 °C? Коэффициент теплового расширения стали, из которой сделана проволока, $\alpha = 10^{-5}$ К$^{-1}$.

5) Выдержит ли проволока натяжение, если зимой при температуре 0 °C на ней образуется наледь с линейным распределением массы $\lambda_1 = 0{,}9$ кг/м? Прочность стали $\sigma_{\max} = 10^9$ Па.

1) Поскольку величина «провиса» значительно меньше расстояния между местами крепления концов проволоки, то можно считать, что линейная плотность проволоки примерно совпадает с линейной плотностью вдоль горизонтального направления, а сила натяжения F примерно одинакова во всех местах проволоки. Если расстояние по горизонтали от нижней точки проволоки до какого-то ее участка равно x и длина такого участка равна Δx, то разность вертикальных сил натяжения ΔF_y проволоки на концах этого участка равна

$$g\lambda\Delta x = F\left(\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x}\right).$$

Разделим правую и левую части этого равенства на Δx и получим

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{g\lambda}{F}.$$

Значит, в принятом приближении форма проволоки – это парабола, описываемая уравнением

$$y = x^2\frac{g\lambda}{2F} = x^2\frac{Mg}{2FL},$$

где M – масса проволоки. Если подставить $x = L/2$, то получится как раз величина «провиса» проволоки H:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2\frac{Mg}{2FL} = H.$$

Отсюда находим величину силы натяжения проволоки:

$$F = \frac{MgL}{8H} = 2{,}5 \text{ кН}.$$

2) Найдем связь между величиной «провиса» и длиной самой проволоки в ненапряженном состоянии, т.е. найдем длину параболы. Длина Δl небольшого участка проволоки, который имеет по горизонтали размер Δx, равна

$$\Delta l = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Поскольку наклон проволоки по отношению к горизонту весьма мал, можно воспользоваться малостью второго слагаемого в подкоренном выражении по сравнению с единицей. Тогда получим

$$\Delta l = \Delta x\left(1 + \frac{(\Delta y/\Delta x)^2}{2}\right).$$

Подставим в это выражение значение производной $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x\frac{Mg}{FL}$ и найдем

$$\Delta l = \Delta x\left(1 + x^2\frac{(Mg)^2}{2(FL)^2}\right).$$

Можно теперь вычислить длину растянутой проволоки:

$$L_{\text{раст}} = 2\left(\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)^3\frac{(Mg)^2}{6(FL)^2}\right) =$$

$$= L\left(1 + \frac{1}{24}\frac{(Mg)^2}{F^2}\right) = L\left(1 + \frac{8}{3}\frac{H^2}{L^2}\right) \approx 100{,}007 \text{ м}.$$

Как видно, вторым слагаемым в скобках можно пренебречь в сравнении с первым, т.е. $L_{\text{раст}} \approx L$. Плотность стали известна: $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Поэтому можно найти поперечное сечение проволоки: $S = \lambda/\rho \approx 13 \text{ мм}^2$. Проволока растянута с «отрицательным» давлением $F/S = 0{,}192\cdot 10^9$ Па, т.е. предел прочности стали еще не достигнут. Относительное удлинение проволоки при таком натяжении равно

$$\frac{F}{ES} = \frac{\rho g L^2}{8HE} \approx 2\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, длина нерастянутой проволоки при температуре 0 °C равна

$$L_1 = \frac{L}{1 + \rho g L^2/(8HE)} \approx 99{,}80 \text{ м}.$$

3) Связь между длиной нерастянутой поволоки L_1, расстоянием между домами L и «провисом» H такова:

$$H = \frac{\rho g L^2}{8E}\frac{L_1}{L - L_1} \approx \frac{\rho g L^3}{8E(L - L_1)}.$$

4) Летом проволока удлинится примерно на $\Delta L = \alpha L\Delta T_{\text{л}} = 3$ см, поэтому «провис» проволоки будет больше, и натяжение проволоки уменьшится. Зимой ее длина сократится примерно на 2 см, «провис» станет меньше, и проволока будет натянута с большей силой. Итак,

$$F_{\text{л}} = 2125 \text{ Н},\ F_{\text{з}} = 2750 \text{ Н},\ \Delta F_{\text{з-л}} = 625 \text{ Н}.$$

5) Воспользуемся ответами на вопросы 3 и 4. При 0 °C и отсутствии наледи длина нерастянутой проволоки равна $L_1 \approx 99{,}8$ м. В полученной формуле для «провиса» присутствует плотность материала проволоки. Если на проволоке образовалась наледь, то это можно учесть, просто увеличив плотность проволоки в

$$N = \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda} = \frac{0{,}1 + 0{,}9}{0{,}1} = 10$$

раз. Длина растянутой проволоки изменится, и величина провиса определится из соотношения

$$H = \frac{N\rho g L^3/(8E)}{\left(8H^2/(3L)\right) + L - L_1}.$$

Это кубическое уравнение относительно H:

$$H^3 + H\frac{3L(L - L_1)}{8} = \frac{3N\rho g L^4}{64E}.$$

Подставим числовые значения:

$$H^3 + 7{,}5H = 36{,}56.$$

Подбор корня такого уравнения не представляет большой трудности:

$$H \approx 2{,}58 \text{ м}.$$

Сила натяжения троса рассчитывается так же, как в первом пункте:

$$F = \frac{NMgL}{8H} \approx 4845 \text{ Н}.$$

Такая сила соответствует напряжению растяжения проволоки

$$\sigma = \frac{F}{S} \approx 0{,}373\cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Это напряжение не превышает предела прочности стали – проволока останется целой!

С.Варламов

Ф2383. *Аргон массой m = 100 г имеет начальную температуру $t_0 = 100$ °C и находится в сосуде объемом V = 100 л. Газу сообщили количество теплоты Q = 100 Дж, и процесс, в котором это произошло, имел теплоемкость C = 100 МДж/К. На сколько увеличился объем сосуда?*

Молярная масса аргона равна 40 г/моль, т.е. в сосуде находится $\nu = 2{,}5$ моль аргона. Теплоемкость процесса так велика, что можно считать ее бесконечно большой, т.е. процесс весьма близок к изотермическому. Начальное давление газа в сосуде найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p = \frac{\nu RT}{V} = 0{,}775\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Практически все тепло, полученное газом, пошло на совершение им работы. Если считать, что давление изменилось мало, то работа газа равна $p\Delta V$. Отсюда находим

$$\Delta V \approx 1{,}29 \text{ л}.$$

Более точный подсчет даст нам величину, отличающуюся от полученной оценки весьма мало:

$$\nu RT\ln\frac{V + \Delta V}{V} = Q, \text{ и } \Delta V = 1{,}29884 \text{ л}.$$

Отличие всего-то примерно на 9 см^3.

А.Сотников

Ф2384. *По расчетам физиков, в центре Солнца температура $T \approx 15\cdot 10^6$ К, давление $p \approx 3{,}2\cdot 10^{16}$ Па, а плотность вещества $\rho \approx 160$ г/см^3. Массовая доля водорода в Солнце практически одинакова по всему его объему и равна 0,7. Выполняется ли* *для солнечного вещества уравнение Менделеева–Клапейрона?*

За счет ядерных реакций вблизи центра Солнца происходит выделение энергии $W = 1$ Дж/(т · с). Солнечная постоянная (поток излучения, идущего от Солнца через площадку 1 $м^2$, перпендикулярную лучам Солнца, вне атмосферы Земли на расстоянии, равном расстоянию от Земли до Солнца, т.е. $L = 150$ млн · км = 1 а.е.) равна $E = 1370$ Вт/$м^2$. Оцените радиус той области вблизи центра Солнца, в которой идут термоядерные реакции. С Земли видимый диск Солнца имеет угловой размер $\alpha = 0{,}5°$.

Сначала обсудим первый вопрос.

При такой высокой температуре нейтральных атомов нет, а электроны и ядра образуют полностью ионизованную плазму. Второй главный компонент солнечного вещества – это гелий, массовая доля которого близка к 0,3. В одном грамме солнечного вещества приблизительно 0,7 г имеют N_1 протонов, 0,3 г имеют N_2 ядер гелия и совсем небольшую долю по массе имеют $N_1 + 2N_2$ электронов. В одном грамме солнечного вещества, следовательно, содержится $(0{,}7 + 0{,}7 + 3 \cdot 0{,}3/4)$ моль частиц, поэтому средняя молярная масса солнечного вещества равна $\mathrm{M} \approx 0{,}615$ г/моль. Это означает, что в 1 $см^3$ в центре Солнца находится примерно 260 моль частиц. Подставив полученные числовые значения в уравнение $pV = \nu RT$, можно убедиться в том, что это уравнение справедливо для вещества в центре Солнца.

Теперь – второй вопрос.

Полный поток излучения, уходящего в Космос от Солнца, равен $P = E \cdot 4\pi L^2$. Эта мощность «рождается» в области радиусом R вблизи центра Солнца. Предположим, что во всей этой области параметры солнечного вещества точно такие же, как и в центре Солнца, а вне этой области ядерные реакции не происходят. Тогда справедливо равенство

$$W \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = E \cdot 4\pi L^2 .$$

Отсюда получаем

$$R = \sqrt[3]{\frac{3EL^2}{W\rho}} = 0{,}833 \cdot 10^8 \text{ м} \approx 80 \text{ тыс. км}.$$

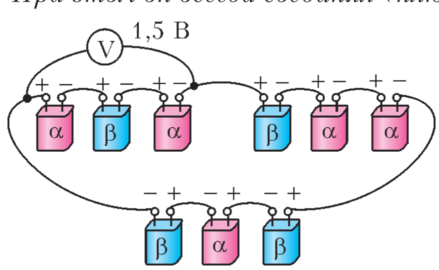
Эта величина значительно меньше диаметра Солнца, равного

$$D = L\pi \frac{0{,}5°}{180°} = 1{,}3 \text{ млн км}.$$

В.Солнцев

Ф2385. *Неопытный лаборант спаял замкнутую цепь из пяти батареек α и четырех батареек β (см. рисунок). При этом он всегда соединял «плюс» одной батарейки с «минусом» другой. Вольтметр, подключенный к группе $\alpha - \beta - \alpha$, показал напряжение 1,5 В. Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный:*

1) к группе $\beta - \alpha - \alpha$;
2) к группе $\beta - \alpha - \beta$;
3) к батарейке α;
4) к батарейке β?



Очевидно, что через все батарейки течет один и тот же ток. Пусть вольтметр подключен к батарейке α (вопрос 3) так, что его «плюс» соединен с «плюсом» батарейки, а «минус» соединен с «минусом», и он показывает напряжение V. И пусть подключенный к батарейке β (вопрос 4) «плюс» к «плюсу» и «минус» к «минусу» вольтметр показывает напряжение U. Цепь замкнутая, поэтому

$$5V + 4U = 0.$$

По условию,

$$|V + U + V| = 1{,}5 \text{ В}.$$

Предположим, что $2V + U = +1{,}5$ В. В этом случае решение системы из двух уравнений с двумя неизвестными дает

$$V_1 = +2 \text{ В}, \quad U_1 = -2{,}5 \text{ В}.$$

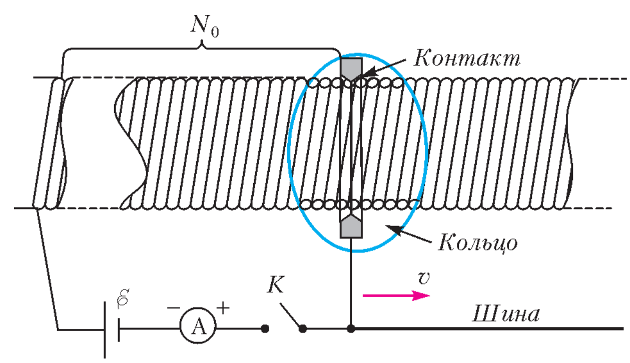
Если предположить, что $2V + U = -1{,}5$ В, то решение будет таким:

$$V_2 = -2 \text{ В}, \quad U_2 = +2{,}5 \text{ В}.$$

Таким образом: 1) $|U + V + V| = 1{,}5$ В; 2) $|U + V + U| = 3$ В; 3) $|V| = 2$ В; 4) $|U| = 2{,}5$ В.

Е.Соколов

Ф2386. *К одному концу очень длинного соленоида, тонкий провод которого намотан в один слой виток к витку на диэлектрический немагнитный сердечник, подключен один вывод идеальной батареи с ЭДС $\mathcal{E}$. Второй вывод этой батареи через идеальный амперметр, разомкнутый ключ и проводящую длинную шину, проложенную параллельно оси соленоида, подключен к проводящему кольцу (см. рисунок), которое,*



перемещаясь поступательно вдоль оси соленоида, всегда касается его провода только в одной точке (точка, естественно, все время меняет свое положение). Контакт есть всегда, так как внутренний диаметр кольца совпадает с внешними диаметрами *витков соленоида. Сопротивление соленоида, шины и кольца равно нулю. Площадь сечения соленоида S, число витков на единицу длины n, скорость движения контактного кольца вдоль оси соленоида v. Ключ замкнули в тот момент, когда кольцо касалось провода в точке, от которой до начала соленоида N_0 витков. Известно, что $N_0/n \gg \sqrt{S}$. Как будет меняться ток в соленоиде со временем? Каким будет установившееся значение этого тока?*

Индуктивность длинного соленоида с числом витков N, не имеющего ферромагнитного сердечника, равна

$$L = \mu_0 nNS,$$

где μ_0 – магнитная постоянная. Так как кольцо перемещается, число «задействованных» витков увеличивается, и индуктивность со временем растет по закону

$$L = \mu_0 nS(N_0 + nvt).$$

Если в соленоиде течет ток i, то магнитный поток, пересекающий все задействованные витки, равен $\Phi = Li$. Поскольку сопротивление всех участков цепи равно нулю, сумма всех действующих в замкнутой цепи ЭДС тоже равна нулю. В рассматриваемом случае это ЭДС $\mathcal{E}$ батареи и ЭДС $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ электромагнитной индукции, которая по закону Фарадея (с учетом правила Ленца) равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Условие равенства нулю суммы всех ЭДС имеет вид

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} - \frac{d(Li)}{dt} = 0.$$

Следовательно, магнитный поток Li растет пропорционально времени:

$$Li = kt,$$

где k – постоянный коэффициент. Отсюда находим зависимость тока от времени:

$$i(t) = \frac{kt}{\mu_0 nS(N_0 + nvt)}.$$

Установившееся значение этого тока через большое время после начала эксперимента будет равно

$$i_\infty = \frac{k}{\mu_0 n^2 Sv}.$$

Д.Сергеев

Ф2387. *Во сколько раз отличаются освещенности поверхности Земли в безлюдной местности на экваторе в 12:00 по местному времени (в полдень) 21 марта и ровно через 12 часов в безоблачную полночь, если этой ночью в 23:59 в этом месте закончилось полное лунное затмение? Угловые размеры φ Солнца и Луны совпадают ($0{,}5°$). Расстояние от Солнца до Земли L = 150 млн км, а расстояние от Луны до Земли s = 380 тыс.км. Коэффициент рассеивания света поверхностью Луны (альбедо) $\alpha \approx 11\%$. Считайте, что рассеянный Луной свет распределяется равномерно по всем возможным направлениям.*

Луна находится примерно на таком же расстоянии от Солнца, что и Земля (отличием этих расстояний можно пренебречь). В указанный день в полдень освещенность поверхности Земли на экваторе пропорциональна солнечной постоянной E. Радиус Луны равен $\varphi s/2$ (здесь угловой размер взят в радианной мере). Любой участок поверхности Луны, на который упало излучение Солнца, рассеивает $\alpha = 0{,}11$ упавшего излучения равномерно по всевозможным направлениям в телесный угол, равный 2π. Естественно, что часть этого рассеянного потока попадает на Землю. А с выбранного места на Земле в указанное время видны все освещенные лунные участки. Полный поток солнечного излучения, падающий на поверхность Луны, равен $E\pi(\varphi s/2)^2$. Доля α этого потока рассеивается Луной. Для оценки освещенности поверхности Земли можно считать, что на расстоянии s от Луны (в том числе и там, где находится Земля) этот рассеянный поток распределяется по площади, равной $2\pi s^2$. Следовательно, на единицу площади поверхности Земли падает поток рассеянного Луной излучения, равный

$$E_1 = \alpha E\pi \frac{(\varphi s/2)^2}{2\pi s^2} = \frac{\alpha E\varphi^2}{8}.$$

Отношение освещенностей поверхности Земли в указанном месте в заданные моменты времени будет равно

$$\frac{E}{E_1} = \frac{8}{\alpha\varphi^2} = 0{,}96 \cdot 10^6 \approx 10^6.$$

По астрономическим данным, полученная оценка отличается от реального отношения примерно в 4 раза. По-видимому, это отличие связано с несправедливостью предположения о том, что рассеянный Луной свет распределяется равномерно по всем возможным направлениям.

В.Лунин

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

В «Кванте» №3 за 2015 год в статье И.Горбатого и Д.Эпитектова на странице 35 адрес «живых рисунков» в сноске приведен с опечатками – в двух местах перепутаны очень похожие на взгляд буквы l (маленькая L) и I (большая i). Вот правильная ссылка:

https://www.youtube.com/channel/UCZwI_7Qd9y_lY5jcrwOVRbA/videos

Задачи

1. Нарисуйте девятиугольник, который можно разрезать на три треугольника.

П.Кожевников

2. Сто одинаковых шкатулок расположены в ряд, в одной находится бриллиант. На каждой шкатулке сделана надпись: «Бриллиант лежит в соседней шкатулке». Известно, что ровно одна надпись из ста правдивая, а остальные – ложные. Как, открыв всего лишь одну шкатулку, узнать, где лежит бриллиант?

Г.Гальперин

3. – Однажды, – рассказывал барон Мюнхгаузен, – я встретил 15 детей и заметил, что у любых трех из них вместе ровно 10 монет. Тогда я тут же сообразил, сколько всего монет у этих 15 детей.

А вы можете ответить, сколько всего монет было у детей? Не напутал ли чего Мюнхгаузен?

П.Кожевников

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

4. В круглом парке проложены две параллельные дорожки, соединенные перпендикулярной им перемычкой, как показано на рисунке. Один пешеход прошел по маршруту $ABEF$, а второй – по маршруту $CBED$. Чей путь был длиннее?

Г.Гальперин

5. Даны 5 карточек, на них написаны дроби 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6. Можно использовать некоторые (или все) карточки, знаки арифметических действий и скобки. Получите таким способом все целые числа от 0 до 20.

Д.Шноль

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Однажды на уроке математики Толик Втулкин написал слева направо в строку по возрастанию все натуральные числа от 1 до 11. Он заметил, что начиная с числа 2 и до конца строки в ней всего 10 чисел – ровно в 5 раз больше, чем само число 2. А начиная с числа 3 и до конца строки в ней всего 9 чисел – ровно в 3 раза больше, чем само число 3. Наконец, начиная с числа 4 и до конца строки в ней всего 8 чисел – ровно в 2 раза больше, чем само число 4. Толик назвал числа 5, 3, 2 *умножителями* и написал их во второй строке под числами 2, 3, 4:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	5	3	2							

Развивая теорию умножителей, Толик написал в строку по возрастанию все натуральные числа от 1 до n, а под некоторыми из них – их умножители. Во второй строке у него оказались числа 11, 9, 7, 5, 4, 3, 2. Найдите наименьшее возможное значение n.

С.Дворянинов

2. Имеется квадратная клетчатая доска размером $2n \times 2n$ клеток (n – натуральное), у которой первоначально все клетки – белые. Закрасим некоторые из них в черный цвет. Назовем раскраску *изящной*, если в каждой горизонтали и каждой вертикали закрашено ровно по n клеток (например, обычная раскраска шахматной доски – изящная).

Возьмем две произвольные изящные раскраски. Петя уверен, что если разрешить менять местами любые две горизонтали или любые две вертикали, то за несколько таких операций можно из первой раскраски получить вторую. Коля считает, что это не так. Для каких n прав Петя, а для каких – Коля?

И.Акулич

3. На плоскости расположены два равных треугольника, не имеющих общих точек (ни внутри, ни на границах). Прямая $П_1$ делит площадь каждого из них пополам, а прямая $П_2$ делит пополам их периметры. Могут ли прямые $П_1$ и $П_2$ быть взаимно перпендикулярны?

И.Акулич

4. Дети изготовили 45 двусторонних карточек, на каждой на разных сторонах написаны две различные цифры, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной карточке. Учитель выкладывает эти карточки на стол. Сможет ли он сделать это так, чтобы дети сумели определить хотя бы про одну карточку, какая цифра написана на ее обратной стороне?

И.Богданов

5. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна h. Каково наименьшее возможное значение длины средней линии такой трапеции?

С.Дворянинов

Деревянная лошадка и сила трения

С.ДВОРЯНИНОВ

В ДЕТСТВЕ У БУРАТИНО БЫЛО НЕМАЛО ИГРУШЕК, и почти все они были самодельные – их делал Папа Карло. Но он был настоящим мастером, и все игрушки были прекрасные. Буратино знал, что к предстоящему дню рождения он получит от Папы Карло очередную новую игрушку.

И вот как-то Папа Карло сказал: «Не буду таить, я хочу подарить тебе лошадку!» С этими словами он принялся за работу, а Буратино устроился рядом и стал наблюдать, как из-под резца появились сначала голова лошади, потом грациозный корпус и, наконец, четыре ноги, по которым сразу был видно, какая это резвая лошадка.

– Так, промолвил Папа Карло, – сейчас мы поставим лошадку на постамент. – Он взял подходящую прямоугольную дощечку и укрепил на ней свое творение.

– Ура! – воскликнул Буратино. – У меня есть новая игрушка! Сейчас я привяжу веревочку, буду ее тянуть, и лошадка будет двигаться, как живая!

– Не спеши, еще не все сделано. И сейчас у тебя ничего не получится.

– Как не получится? – удивился Буратино, который уже нашел и успел привязать подходящую бечевку. – Смотри: я тяну, лошадка едет.

– Тянуть-то ты тянешь, но движению мешает трение. Дощечка скользит по полу, при этом между дощечкой и полом возникает сила трения скольжения (рис.1). Вот эту силу трения тебе и приходится преодолевать своей силой тяги, которая приводит лошадку в движение. Ты прикладываешь эту силу, тянешь свою лошадку и совершаешь при этом работу.

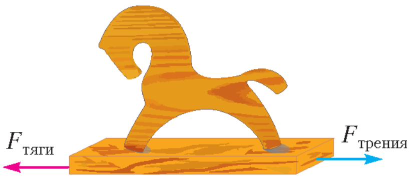


Рис. 1

– Получается, что я, играя с лошадкой, еще и работаю? Это для меня новость! – изумился Буратино.

– Да-да, именно так. Помнишь поговорку: без труда не вынешь и рыбку из пруда? Или еще: любишь кататься, люби и саночки возить? Очень мудрые слова. Слово *труд* – это синоним слова *работа*.

Буратино на миг задумался. – Значит, без работы никак нельзя? – с долей огорчения спросил он.

– Нет, никак нельзя. Конечно, можно приспособить электромоторчик, но для него надо покупать батарейки...

– Нет, не надо ничего покупать. Я знаю, деньги достаются нелегко, тебе приходится много работать. Я утром просыпаюсь, а ты уже стоишь за своим верстаком. Вечером ложусь спать, ты все еще трудишься. Спасибо тебе за все, – Буратино обхватил Папу Карло за шею и прижался к нему. – Если я хочу играть с лошадкой и при этом должен совершать работу, то я буду это делать сам!

Растроганный Папа Карло поцеловал своего деревянного сынишку.

– Как я рад, что у тебя доброе, человеческое сердце. Но я ведь пока не все сделал. Ну-ка, достань коробку со своими цветными карандашами.

Папа Карло поставил лошадку на выложенные в ряд карандаши.

– Попробуй сдвинуть свою лошадку. Видишь, теперь она катится по карандашам, а карандаши катятся по столу (рис.2). Так в древности люди перемещали тяжелый груз: клали круглые бревна, а на них груз. При этом приходилось постоянно перекладывать бревна, которые оставались позади, вперед. Груз съезжал с одних бревен и наезжал на те, которые были впереди. А уж потом изобрели колесо. Сейчас я прилажу к твоей лошадке колеса.

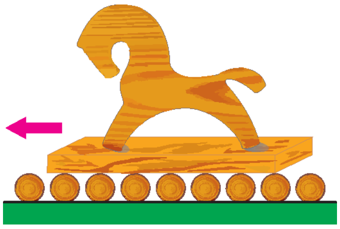


Рис. 2

– Но у лошадей не бывает колес. Колеса есть у телег... – начал было Буратино.

– Конечно, поэтому я прилажу колеса к дощечке, на которой стоит лошадка. Колесо – величайшее изобретение человечества. Когда колесо катится по поверхности, сила трения скольжения отсутствует. Правда, возникает сила трения качения.

– Какое же тут трение? Трение – это когда мочалкой трешь по спине или ластиком стираешь ошибку на бумаге. Тут, понятное дело, трение имеется. А вот при качении колеса ничто ни обо что не трется, – уверенно произнес Буратино.

– Хорошо, рассмотрим такой случай. Пусть колесо, мячик или бревно катится по песку (рис.3). Поверхность песка становится теперь не плоской – под тяжестью колеса песок проседает. Колесо оказывается в своего рода ложбинке, из которой оно пытается выбраться. Но это не удается: колесо придавливает песок перед собой, ложбинка бежит по песку вместе с колесом, и нам постоянно приходится совершать работу по деформации песка. Силу, препятствующую движению колеса, и называют силой трения качения.

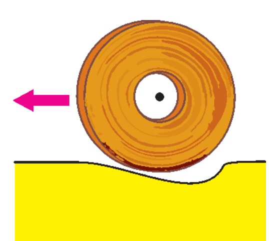


Рис. 3

– С песком вопросов нет, а если колесо катится по твердой поверхности? Какие тут ложбинки-деформации? Их нет, – возразил Буратино.

– Есть они и в этом случае. Только они маленькие, и поэтому только кажется, что их нет вовсе. Но они есть всегда. Шарик легко катится по полированной поверхности стола или по стеклу, но плохо по ковру или паласу. Почему люди построили железные дороги? Да потому, что рельсы и колеса у локомотивов и вагонов стальные, они мало деформируются при движении поезда. Главное, что сила трения качения намного меньше силы трения скольжения. Поэтому я и приладил колеса к твоей игрушке.

– Значит, сейчас я буду преодолевать только силу трения качения? – спросил Буратино.

– Нет, не только. Останется и трение скольжения.

– Но ведь у колеса его нет. Откуда трение скольжения? – недоумевал Буратино.

– Это у свободного колеса нет скольжения, а у колеса на оси – есть. Ось давит на колесо, и возникает трение скольжения.

– Но если мы так и не избавились от скольжения, то зачем же тогда колесо? – засомневался Буратино.

– Давай разбираться, – продолжил Папа Карло. Пусть колесо совершило полный оборот, проделав путь, который примерно в шесть раз больше его внешнего радиуса. При этом ось переместилась по внутренней поверхности колеса на значительно меньшее расстояние, равное примерно шести внутренним радиусам колеса. Мы преодолеваем силу трения скольжения на меньшем пути. Меньше путь – меньше работа. А кроме того, ось обычно смазывают машинным маслом для уменьшения силы трения. В прежние времена для колесной смазки использовали деготь.

– А можно еще уменьшить трение скольжения? – спросил Буратино. Его так заинтересовал этот вопрос, что он даже подумал о том, чтобы после школы выучиться на инженера.

– Да, можно. Например, если между осью и колесом поместить шарики или ролики (помнишь бревна древних строителей?). Именно так устроены подшипники, обеспечивающие наименьшее сопротивление при качении (рис.4).

Рис. 4

Внешнее кольцо подшипника катится по шарикам (или роликам), которые катятся по внутреннему кольцу подшипника. Правда, в настоящих подшипниках есть еще одна деталь – называется *сепаратор*.

– Сепаратор? Это я знаю, – воодушевился Буратино. – Когда я был у Мальвины на ее дне рождения, она угощала гостей клубникой со сливками. Она брала молоко, пропускала его через сепаратор, и получались сливки. Сепаратор отделяет сливки от молока. А зачем сепаратор в подшипнике?

– Слово «сепаратор» может употребляться в разных случаях. Сепаратор в шарикоподшипнике – это своеобразная решетка, которая отделяет один шарик (или ролик) от другого и направляет их движение, – ответил Папа Карло.

– Вот теперь мне все ясно! – весело воскликнул Буратино.

С этажа на этаж

И.АКУЛИЧ

Как только человечество начало строить многоэтажные дома, появились и многочисленные весьма разнообразные задачи про них. Пожалуй, самую эффектную предложил в 1914 году судебным врачам незабвенный Йозеф Швейк[1]:

– Стоит четырехэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше – два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. А теперь скажите, господа, в каком году умерла у швейцара бабушка?

Задача производит сильное впечатление, и, возможно, именно поэтому ее до сих пор никто не решил.

Мы, правда, такие задачи рассматривать не будем – ограничимся теми, которые можно одолеть, используя обычный школьный курс математики. Например, такая (автор – М.Ролова):

На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше, чем ты, Вова, в два раза, выше Пети в три раза, выше Андрея в четыре раза и выше Тани в шесть раз». «Ты это здорово подметил, – отозвался Андрей, – а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живет Андрей?

Прикинем, на сколько этажей выше первого может жить Женя. Это число (разумеется, натуральное) должно одновременно делиться на 2, 3, 4 и 6, а следовательно – на их наименьшее общее кратное, равное 12. Поэтому номер этажа, на котором живет Женя, можно записать как $12k+1$, где k – некоторое натуральное число. Отсюда легко выяснить, что Вова живет на $(6k+1)$-м этаже, Петя – на $(4k+1)$-м, Андрей – на $(3k+1)$-м и Таня – на $(2k+1)$-м.

Как-то многовато получается возможностей, но здесь спасают упомянутые в условии гантели. Из условия следует, что Петя живет непосредственно над Андреем – т.е. на 1 этаж выше. А поскольку $(4k+1)-(3k+1)=k$, то $k=1$. Итак, Женя живет на 13-м этаже, Вова – на 7-м, Петя – на 5-м, Андрей – на 4-м и Таня – на 3-м этаже.

В следующей задаче лифт не просто упоминается, но и активно используется (автор – А.Спивак):

В 100-этажном доме испорчен лифт. Он может либо подниматься при нажатии одной кнопки на 79 этажей вверх, либо при нажатии другой – опускаться на 21 этаж вниз. Когда сверху меньше 79 этажей, лифт вверх не пойдет, аналогично – вниз. Лифт отправляется с первого этажа. Какое наименьшее количество раз надо нажать кнопки, чтобы лифт вернулся на первый этаж?

Оценим *снизу* число нажатий. Пусть пришлось m раз нажать кнопку подъема на 79 этажей и n раз нажать кнопку спуска на 21 этаж. Всего, таким образом лифт поднялся по сравнению с первоначальным положением на $79m-21n$ этажей. Но лифт в итоге вернулся на тот же 1-й этаж! Поэтому $79m-21n=0$, и $79m=21n$. Так как числа 79 и 21 взаимно просты, то m делится на 21, а n делится на 79. Следовательно, их сумма не меньше $79+21=100$. Значит, кнопку надо нажать как минимум 100 раз.

В силу того что $79+21=100$, нет ни одного этажа, на который можно приехать и сверху, и снизу, и нет ни одного этажа, с которого можно уехать и вверх, и вниз. Значит, на каком бы этаже мы ни находились, можно точно сказать, какой этаж был предыдущим и какой будет следующим. Поэтому для пассажира задача решается автоматически, и не надо даже отслеживать, на какой этаж попал лифт после очередного нажатия. Требуется лишь нажимать кнопки как попало (ровно одна из двух всякий раз сработает) и отсчитывать количество передвижений. Докажем, что после сотого передвижения можно выходить – цель будет достигнута.

Рассуждаем, используя метод «от противного». Предположим обратное – что, стартовав с 1-го этажа и выполнив 100 переездов, мы оказались *не* на 1-м этаже. Мы уже доказали, что не могли оказаться на 1-м этаже и *раньше* 100-го перемещения, поэтому среди этажей, на которых побывал лифт после каждого из ста перемещений, 1-го этажа нет. Но тогда лифт как минимум *дважды* побывал на каком-то из остальных этажей (их-то всего 99, а перемещений – больше!). Выберем тот момент, когда лифт *впервые* повторно попал на какой-то этаж. Предыдущий этаж, с которого приехал лифт, однозначно определен, а значит, и на нем лифт побывал дважды. Противоречие – ведь мы выбрали момент, когда повторное попадание произошло *впервые*. Значит, предположение

[1] Ярослав Гашек. «Похождения бравого солдата Швейка во время мировой войны». Часть первая, глава III.

было неверным, и после 100-го перемещения лифт окажется именно на 1-м этаже, что и требовалось доказать.

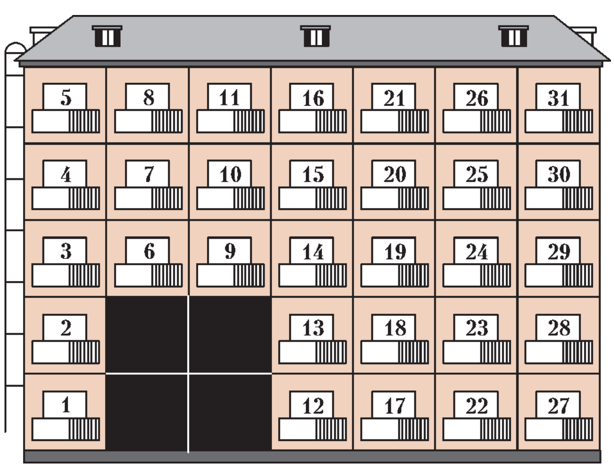
Из нашего рассуждения видно, что в ходе перемещений к заданной цели (т.е. исходному положению) лифт побывает на *всех* этажах дома. Это, кстати, позволяет сделать вывод, что независимо от исходного этажа можно ровно за 100 перемещений лифта вернуться туда же.

Помимо этажей, в задачах про многоэтажные дома фигурируют также подъезды и квартиры. При этом по умолчанию принимается, что этажи нумеруются снизу вверх, начиная с единицы.[2] Подъезды тоже нумеруются по порядку. Все лестничные площадки (если в тексте специально не указано иное) по умолчанию предполагаются одинаково устроенными (с одинаковым же количеством квартир на этаже), и квартиры нумеруются подряд, начиная с первой: сначала в первом подъезде на первом этаже, потом на втором, третьем, и так далее до последнего этажа, затем нумерация продолжается с первого этажа второго подъезда и далее вверх… Впрочем, мы все это хорошо знаем по себе: ведь многие из нас живут в многоэтажках! Именно такая стандартная общепринятая схема позволяет не упоминать лишние детали, что позволяет делать условие более компактным. Например:

Семиклассник Петя переехал в новый пятиэтажный дом, у которого 1-й и 2-й этажи во 2-м и 3-м подъездах заняты под склад. На каждой лестничной площадке не более четырех квартир. Номер квартиры Пети – 31. На каком этаже живет Петя?

Задача была придумана еще в семидесятые годы прошлого века, когда такие дома строили направо и налево.[3] Но суть не в этом. Смущают слова «…не более четырех квартир». А сколько именно? Неизвестно. Ничего не поделаешь, придется рассматривать все варианты.

Что ж, нарисуем схематично пятиэтажный дом и расставим в нем номера квартир, «захватив» при этом 31-ю квартиру – ведь что там дальше, нас не интересует (при этом места, занимаемые злополучным складом, просто закрасим черным цветом и при нумерации пропустим). Итак, если на каждом этаже одна квартира, то все это выглядит так:



[2] За рубежом в некоторых странах – с нуля, но мы такие возможности рассматривать не будем.

[3] Ничего удивительного нет: по строительным нормам в домах не выше пяти этажей не требуется лифт – очевидная экономия!

Как видно, если квартир на этажах по одной, то 31-я квартира – на пятом этаже. А если квартир 2, 3 или 4, то соответственно имеем:

9,10	15,16	21,22	31,32
7,8	13,14	19,20	29,30
5,6	11,12	17,18	27,28
3,4			25,26
1,2			23,24

13,14,15	22,23,24	31,32,33
10,11,12	19,20,21	28,29,30
7,8,9	16,17,18	25,26,27
4,5,6		
1,2,3		

17,18,19,20	29,30,31,32	
13,14,15,16	25,26,27,28	
9,10,11,12	21,22,23,24	
5,6,7,8		
1,2,3,4		

Удивительно, но факт: во всех случаях 31-я квартира находится на пятом этаже. Так что ответ однозначен, несмотря на некую расплывчатость условия.

Что, не понравилось использование перебора? Конечно, метод не слишком привлекательный, но ничем не хуже других. Впрочем, он требуется далеко не всегда. Например, такая задача (автор – А.Ковальджи):

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в 10-м подъезде в квартире 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться?

Ключ к решению – оценка возможного числа квартир на этаже. Если на этаже не более трех квартир, то всего их в десяти подъездах не более $3\cdot9\cdot10=270$, т.е. в 10-м подъезде 330-й квартиры не будет. Если же квартир не меньше пяти, то уже в девяти первых подъездах будет не менее $5\cdot9\cdot9=405$ квартир, так что опять 333-я квартира в 10-й подъезд не попадает. Значит, никуда не денешься – на каждом этаже 4 квартиры. Тогда в первых девяти подъездах $4\cdot9\cdot9=324$ квартиры, и в 10-м подъезде номера квартир начинаются с 325-й. А отсюда уже элементарно определяется, что Пете нужно подняться на третий этаж.

А вот задача, для решения которой главное – подобрать правильный подход (автор – А.Хамитдулин):

Коля и Витя живут в одном доме. На каждом из этажей во всех подъездах их дома расположено по четыре квартиры. Коля живет на пятом этаже в квартире №83, а Витя – на третьем этаже в квартире №169. Сколько этажей в их доме?

Пусть в доме $Э$ этажей. Обозначим количество подъездов от первого до того, в котором живет Коля (*не считая* того подъезда, в котором он живет), через K. Тогда во всех предыдущих Колиных подъездах всего $4ЭK$ квартир. Добавим сюда и квартиры Колиного подъезда вплоть до квартиры самого Коли включительно. На четырех этажах под ним всего $4\cdot4=16$ квартир. А на Колином этаже сколько? Нетрудно сообразить, что наибольший номер квартиры на каждом этаже делится на 4. Поэтому наибольший номер квартиры на предыдущем, четвертом, этаже равен 80, так что Колин этаж дает добавку еще в 3 квартиры. Итого получаем: $4ЭК + 16 + 3 = 83$, откуда $ЭК = 16$. Обозначив для Вити аналогичное количество подъездов через $В$, такими же рассуждениями получим: $4ЭВ + 8 + 1 = 169$, откуда $ЭВ = 40$. Итак, искомое значение $Э$ является делителем чисел 16 и 40. У них есть четыре общих делителя: 1, 2, 4 и 8. Но поскольку Коля живет на пятом этаже, то $Э$ заведомо не меньше 5. Поэтому остается единственная возможность: $Э = 8$, т.е. в доме 8 этажей.

Над созданием следующей задачи трудился целый авторский коллектив (Т.Голенищева-Кутузова, В.Гуровиц, П.Кожевников, И.Ященко):

Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте?

Что ж, пусть согласно исходному проекту в доме было $П$ подъездов, $Э$ этажей и по $К$ квартир на каждой площадке. Тогда из условия следуют два утверждения:

$$(П-2)\cdot(Э+3)\cdot К > ПЭК\,,$$

$$(П-4)\cdot(Э+6)\cdot К < ПЭК\,.$$

Из первого неравенства $3П - 2Э > 6$, а из второго $3П - 2Э < 12$. Итак, осталось подобрать (если это возможно) такие значения $П$ и $Э$, что $6 < 3П - 2Э < 12$. Это не составляет труда – например, $П = 5$ и $Э = 4$, так что если в исходном проекте было 5 подъездов и 4 этажа, то описанная ситуация могла произойти. При этом число квартир на площадке совершенно не играет роли, так как сокращается при преобразованиях.

Надеемся, читатель вошел во вкус, рассматривая решения представленных задач. Самое время предложить парочку аналогичных задач для самостоятельного решения. Правда, у них есть одна особенность: для пущего читательского удовольствия в каждую задачу вставлена маленькая ловушка, которая может натолкнуть на ложный след. Так что будьте бдительны!

Первая задача. Жильцы всех квартир, выходящих на одну лестничную площадку, решили прикрепить на двери новые номера и обратились в кооператив с просьбой изготовить необходимые для этого 7 цифр. Оказалось, что кооператоры берут за изготовление каждой цифры столько рублей, каково значение этой цифры (например, двойки производят по 2 рубля за штуку, а нули – вообще бесплатно). Жильцы собрали с каждой квартиры по 3 рубля, и этого им хватило. Сколько и каких цифр было заказано?

Вторая задача. У лифта на первом этаже 18-этажного дома собрались 17 школьников, которым надо подняться вверх, причем всем на разные этажи. Лифтер же согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком (лифт достаточно велик и способен вместить всех). Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются пешком на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком на один этаж. Какой этаж им надо выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

XXI Турнир математических боев имени А.П.Савина

С 26 июня по 2 июля 2015 года на базе отдыха «Берендеевы поляны» (Судиславль, Костромская обл.) прошел ежегодный турнир математических боев. Сроки и место проведения турнира давно стали традиционными.

Прошедший турнир собрал 36 команд школьников, окончивших 5–9 классы, из Москвы, Санкт-Петербурга, Ижевска, Ленского края (республика Саха) и Ярославля.

В день открытия турнира проводилась разминочная игра «Математический квадрат», а на следующий день прошла устная командная олимпиада. По ее результатам и с учетом возраста школьников участников раздели на шесть лиг для проведения математических боев: высшая и первая лиги 6 классов, лиги 7, 8 и 9 классов, а также лига 7–8 классов. Впервые за много лет в числе победителей турнира оказались только команды из Москвы: в высшей лиге 6 – команды ФМШ 2007 (руководитель – Н.Волкова) и гимназии 1514 (руководитель – Л.Бычкова), в первой лиге 6 – еще одна команда гимназии 1514 (руководитель – Д.Шаинская), в лиге 7 – команда школы 9 (руководитель – К.Скопцов), в лигах 8 и 7–8 – команды гимназии 1543 (руководители – О.Орел и А.Заславский), в лиге 9 – команда ФМШ 2007 (руководитель – Е.Лысенок). В рамках турнира также традиционно проводилась личная устная олимпиада в каждой параллели.

Основные организаторы турнира – «Фонд математического образования и просвещения» и Образовательная программа «Большая перемена» (председатель оргкомитета – С.И.Комаров).

Отбором задач и составлением вариантов занимается методическая комиссия. В этом году в ее составе работали Э.Акопян, М.Артемьев, В.Арутюнов, Е.Бакаев, А.Банникова, А.Блинков (председатель), Ю.Блинков, Е.Горская, А.Заславский, О.Заславский, Ю.Котельникова, Н.Наконечный, И.Раскина, А.Хачатурян, П.Чулков, А.Юрков. В состав жюри турнира входили и все желающие руководители команд школьников.

Приведем некоторые задачи турнира (в скобках после номера задачи указано, для каких классов она предлагалась).

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1 (6–7). На каждой клетке доски стоит по гному – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной. Какое наибольшее количество гномов на шахматной доске могли бы сказать фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей»?

А.Шаповалов

2 (7). Летняя школа проходила 11 дней. Каждый день кормили комаров 10% ее участников. Для любых двух последовательных дней больше 1% участников школы кормили комаров оба эти дня. Обязательно ли найдется участник, ни разу не кормивший комаров?

А.Ляховец, О.Орел, А.Скопенков

3 (7–9). В ряд выложили 45 белых и 67 черных шаров. На каждом из них записали, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалось, что сумма чисел на белых шарах равна 1000. Чему может быть равна сумма чисел на черных?

А.Грибалко

4 (8). От однокругового футбольного турнира, где результативно участвовали (т.е. забили или пропустили по крайней мере один мяч) более трех команд, осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математик смог по ней однозначно восстановить счет каждого матча. Докажите, что какая-то команда забила столько мячей, сколько пропустили все остальные вместе.

А.Шаповалов

5 (8–9). Гриша составил прямоугольник из фигурок тетрамино пяти видов (рис.1), причем каждый из видов

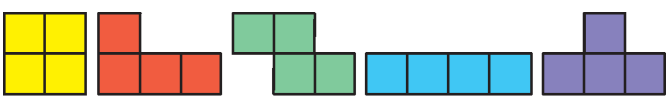


Рис. 1

либо вообще не использовался, либо был использован нечетное количество раз. (Фигурки Гриша мог поворачивать и переворачивать.) Сколько видов фигурок смог использовать Гриша?

Е.Бакаев

6 (8–9). В вершинах квадрата со стороной 1 м были вбиты колышки. Один из колышков переставили, но не более чем на 20 см от первоначального положения. У Пети есть веревка, с помощью которой он может сравнить расстояние между двумя колышками с расстоянием между еще какой-то парой колышков (т.е. можно сравнить любые два расстояния из шести попарных расстояний между колышками). Каких-либо других действий (например, завязывать узелки, складывать пополам и прочее) с веревкой делать нельзя. Всегда ли Петя сможет определить, какой из колышков был переставлен?

А.Марачев

7 (8–9). Несколько правильных треугольников с параллельными сторонами, расположенные на плоскости, покрашены в 4 цвета. Известно, что любые два треугольника разного цвета имеют общую точку. Докажите, что для какого-то цвета любые два треугольника имеют общую точку.

А.Шаповалов

8 (8). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, BL и CN – биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

Д.Прокопенко

9 (8–9). Точка C лежит внутри полукруга с диаметром AB, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Лучи AI и BI пересекают данную полуокружность в точках X и Y. Докажите, что $XY \perp CI$.

М.Волчкевич

10 (9). Треугольники AMB и BNC – равносторонние, $AK = AB$, $CK = CB$ (рис.2). Докажите, что точки K, M и N лежат на одной прямой.

А.Акопян

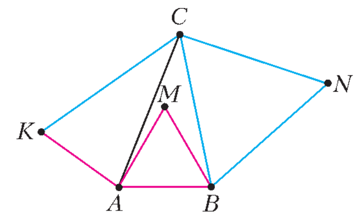


Рис. 2

11 (9). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC и ACD, касаются друг друга тогда и только тогда, когда угол DAB – прямой.

А.Иванов

12 (8). В тридевятом государстве было 200 работающих предприятий. Шесть министров приватизировали часть предприятий. Когда наступили «смутные времена», первый министр продал второму 10% своих предприятий и еще одно. Затем второй министр продал третьему 10% предприятий, имеющихся у него к этому моменту, и еще два, после чего третий продал 10% и еще три и так далее, до тех пор, пока шестой не продал первому 10% своих предприятий и еще 6. В результате у каждого министра оказалось столько же предприятий, сколько он приватизировал изначально. Сколько предприятий осталось у государства?

А.Заславский

13 (8–9). Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такова, что $a_1 = a_{2015}$ и для всех натуральных n выполняется равенство $a_n + a_{n+1} = a_{n+1}^2 + 1$. Найдите a_{1000}.

А.Блинков

14 (9). Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что $f\left(\frac{n-2015}{n}\right) = \frac{m-2015}{m}$ (где m и n – натуральные числа)?

А.Шаповалов

15 (9). Можно ли заполнить числами квадратную таблицу 7×7 так, чтобы сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 была положительной, а сумма всех чисел в любом квадрате 5×5 – отрицательной?

В.Журавлев, П.Самовол

16 (9). Известно, что $a < b < c$ – натуральные числа, составляющие арифметическую прогрессию. Может ли выполняться равенство $\text{НОК}(a; b) = \text{НОК}(a; c)$?

Б.Френкин

Публикацию подготовил А.Блинков

Бестормозные космические корабли-невидимки

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

НАША ИСТОРИЯ НАЧИНАЕТСЯ С 1687 ГОДА, КОГДА ВЫШли «Математические начала натуральной философии» Ньютона, и продолжается вплоть до наших дней – последние известные нам публикации на эту тему датируются 2013-м годом.

«Начала» состоят из трех книг. В первой сформулированы законы движения – законы Ньютона, а также закон всемирного притяжения. В третьей книге содержится изложение небесной механики и теории приливов. Мы же расскажем об одной из задач, рассмотренной во второй книге, где речь идет о движении тел при наличии сопротивления среды.

Аэродинамическая задача Ньютона. Начнем с двух цитат. В первой из них дано описание среды, в которой движутся тела:

Если шар и цилиндр, описанные на равных диаметрах, движутся с одинаковой скоростью по направлению оси цилиндра в редкой среде, состоящей из равных частиц, свободно расположенных в равных друг от друга расстояниях, то сопротивление шара вдвое меньше сопротивления цилиндра.

Тут следует добавить, что сопротивление, по Ньютону, возникает в силу абсолютно упругого соударения частиц с телом.

Во втором отрывке собственно и формулируется аэродинамическая задача Ньютона:

По этому способу можно сравнивать сопротивление и других фигур между собою, а также находить те, которые наиболее приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде.

Ньютон предъявляет решение этой задачи – дает геометрическое описание осесимметричного тела, обладающего наименьшим сопротивлением при движении в редкой среде.

Приведем современную формулировку задачи Ньютона. Как и Ньютон, станем считать тело неподвижным, а частицы, каждая массой m, – движущимися относительно него с одной и той же скоростью v, параллельной оси тела. Будем рассматривать только осесимметричные тела.

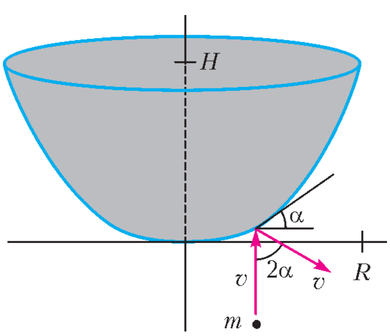


Рис.1. Одиночная частица упруго соударяется с покоящимся телом

Пусть тело получается из кривой $y = y(x)$ вращением вокруг оси y, причем $y(R) = H$. Через α обозначим, как это сделано на рисунке 1, угол между касательной к графику функции $y(x)$ и осью x в точке соударения. Тогда модуль изменения проекции импульса (и частицы, и тела) на ось y будет равен

$$\Delta p_y = mv + mv\cos 2\alpha = 2mv\cos^2\alpha = \frac{2mv}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

или, учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$,

$$\Delta p_y = \frac{2mv}{1+\left(y'(x)\right)^2}. \qquad (1)$$

Чтобы получить полное сопротивление, необходимо проинтегрировать это выражение по параллели, и это даст множитель $2\pi x$, а также по радиусу, т.е. по x. Окончательный результат для силы сопротивления, полученный после отбрасывания постоянного множителя, который не влияет на решение задачи минимизации, будет таким:

$$F(y) = \int_0^R \frac{x}{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (2)$$

Отметим, что в формулу (1) скорость v входит в первой степени, а в отброшенный коэффициент – во второй, так как от нее зависит не только изменение импульса частицы, но и частота соударений частиц с телом.

Итак, ищется кривая $y = y(x)$, которая удовлетворяет условию $y(R) = H$ (см. рис.1) и для которой интеграл (2) минимален. Тело, полученное при вращении этой кривой вокруг оси y, и будет обладать наименьшим сопротивлением. О современном подходе к решению этой задачи можно прочитать, например, в книге В.М.Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах». Ответ таков:

оптимальная кривая включает в себя отрезок оси и дугу кривой

$$x = c\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right),\quad y = c\left(\ln\frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4}u^4 - \frac{7}{4}\right),\quad u > 1. \qquad (3)$$

При этом c выбирается из условия $y(R) = H$.

Это тот же самый ответ, что описан Ньютоном в геометрической форме в его Началах. При этом Ньютон считает, что «это утверждение может быть не бесполезно при построении судов».

На рисунке 2 представлена одна из таких кривых $y(x)$. Тело, образованное вращением этой кривой, представляет собой усеченный криволинейный конус. Выходит, что по Ньютону тело наименьшего сопротивления должно обладать тупым концом, и это конечно противоречит нашей интуиции.

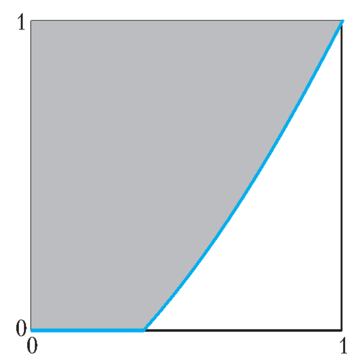


Рис.2. График кривой $y(x)$ для $R = 1$ и $H = 1$, он соответствует значению параметра $c = 0{,}08774$

Впрочем, это не единственная позиция, с которой и постановка задачи Ньютоном и ее решение подвергались сомнению.

Критика. Вот, что пишет по этому поводу Лоренс Янг в своей книге «Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления»:

Ньютон сформулировал вариационную задачу о теле вращения, испытывающем наименьшее сопротивление при движении в газе. Принятый им закон сопротивления физически абсурден, в результате чего поставленная им задача не имеет решения (чем более зазубрен профиль, там меньше сопротивление). Если бы выводы Ньютона были *хотя бы приблизительно верны (после устранения явных нелепостей), то мы не нуждались бы сегодня в дорогостоящих аэродинамических трубах.*

Начнем с абсурдности закона сопротивления. По сути дела, Янг сомневается в существовании «редкой» среды, введенной Ньютоном. И действительно, до недавнего времени мы не сталкивались с такими средами. Но как теперь выяснилось, космические полеты на высотах порядка 150 км проходят в условиях, близких к описанным Ньютоном. Так что сейчас Ньютон и вправду мог бы сказать, что его подход мог быть не бесполезен при построении космических судов.

Теперь обсудим второй аргумент – о зазубренном профиле.

Отказ от выпуклости. Вернемся к силе сопротивления, представленной интегралом (2). Там в знаменателе стоит квадрат производной $y'(x)$, и выходит, что чем больше модуль производной, тем меньше сила сопротивления. Для поверхности, сплошь покрытой острыми (с большими наклонами) зубцами, сила сопротивления, вычисленная по формуле (2), будет действительно близка к нулю. Отметим, что это рассуждение имеет ограниченную применимость. Дело в том, что при большой остроте зубцов отдельная частица, попадая между зубцами, может испытывать кратные соударения с телом, что не предусмотрено формулой (2). Но все-таки, если угол при вершине зубца не меньше $120°$, как, например, на рисунке 3, то соударения останутся единичными, а сопротивление уменьшится.

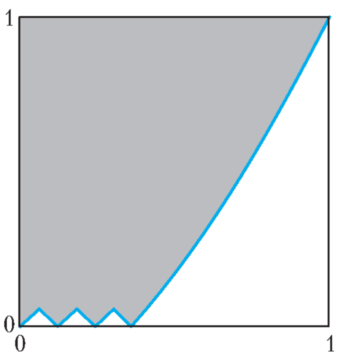


Рис.3. Эта кривая порождает тело вращения с меньшим сопротивлением, чем аналогичная кривая на рисунке 2

Конечно, и эту критику можно отвергнуть, говоря о том, что Ньютон рассматривал только выпуклые тела, так что у него не могло возникнуть никакой зазубренности.

Отказ от осевой симметрии. Можно сказать, что предыдущая критика была всего лишь легким покусыванием. Но в 1996 году произошло действительно сенсационное событие. Появилась работа, где было доказано, что выпуклое тело с минимальным сопротивлением не является телом вращения. И вскоре было предъявлено тело, которое обладало меньшим сопротивлением, чем оптимальное ньютоновское тело соответствующих размеров, и действительно не являлось осесимметричным (рис.4).

Понятно, что появление этих результатов «открыло сезон охоты на ведьм». Были предприняты многочисленные попытки ответить на вопрос: как же на самом деле выглядит выпуклое тело, являющееся решением аэродинамической задачи Ньютона? Несмотря на имеющиеся продвижения, эта задача до сих пор еще не решена.

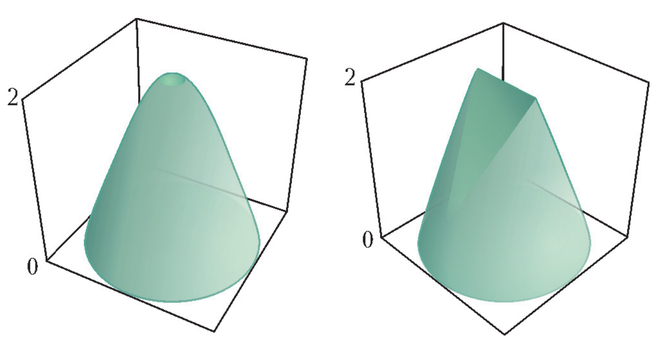


Рис.4. Оптимальное тело Ньютона и тело, обладающее меньшим сопротивлением (высота обоих тел H = 2, радиус основания R = 1)

Отказ от односвязности и одноударности. Ну, а Александр Плахов совершил и вовсе невероятное – вместе с Аленой Алексенко он обнаружил тело ненулевого объема, которое может двигаться в ньютоновской разреженной среде вообще без всякого сопротивления.

Начнем с чуть более раннего достижения Плахова. На рисунке 5 изображены дуги двух подобных софокусных парабол $y = x(1-x)$ и $y = (x-1/2)^2/\varepsilon - \varepsilon/4$. В результате вращения этой картины вокруг оси y, обозначенной штриховой линией, мы получим конусообразное тело, окруженное кольцевой поверхностью малой площади, стремящейся к 0 при $\varepsilon \to 0$. После двойного столкновения с этим телом большинство частиц покидают его с той же самой скоростью, что пришли ($\Delta p = 0$). И только малая часть, а именно те частицы, которые соударяются с маленькой дугой параболы, изменяют свою скорость. Ясно, что сопротивление такого составного тела, скрепленного очень тонкими стержнями, за счет выбора подходящего ε может быть сделано сколь угодно малым.

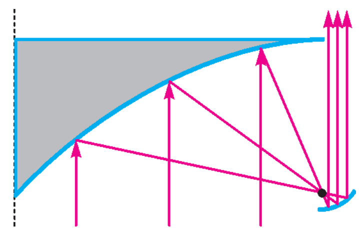


Рис.5. После двойного соударения частицы движутся с прежней скоростью

А на рисунке 6 изображено тело, которое и вовсе обладает нулевым сопротивлением. Можно считать, что это тело состоит из двух параллельных призм. А можно, вращая рисунок вдоль оси симметрии, получить торическое тело с дыркой посередине – наличие дырок есть признак неодносвязности.

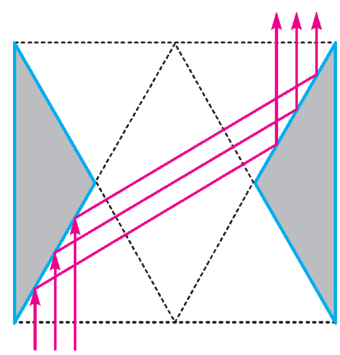


Рис.6. Тело с нулевым сопротивлением

Мы не будет приводить другие замечательные примеры, придуманные Плаховым, а сразу перейдем к обнаруженной им удивительной оптической аналогии.

Невидимки. Удвоим тело, изображенное на рисунке 6, и будем считать его поверхность зеркальной. Тогда на рисунке 7 будут представлены не траектории соударяющихся с этим телом частиц, а отражающиеся от него световые лучи. Видно, что каждый световой луч, идущий параллельно оси симметрии тела, после прохождения не меняет своего направления и остается своим прямолинейным продолжением. Другими словами, тело, изображенное на рисунке 7, прозрачно для лучей, параллельных его оси.

Этот результат тоже вызвал большой резонанс и к тому же был мно-

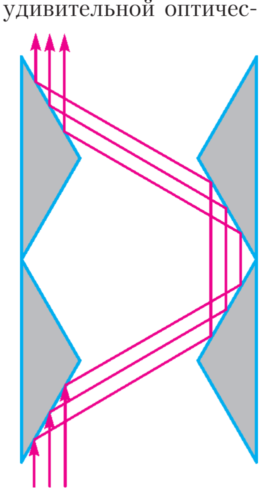


Рис.7. Тело-невидимка

(Продолжение см. на с. 34)

Затем смотри: сохраняет ли луч свою прямизну, которую он имеет снаружи, проходя через воду, заключенную между сосудами, или нет?

Леонардо да Винчи

Ученейший Декарт предложил закон преломления, который, как считают, согласуется с опытом...

Пьер Ферма

...идея о глубокой взаимосвязи двух великих принципов Геометрической оптики и Динамики могла бы стать ценным руководством для реализации синтеза волн и квантов.

Луи де Бройль

...существует некий предел, за которым всякое уточнение бессмысленно, потому что приближение геометрической оптики перестает работать!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам оптика и геометрия?

Законы прямолинейного распространения и отражения света, о которых шла речь в прошлом выпуске «Калейдоскопа», практически были известны с глубокой древности. Затем они многократно проверялись и подтверждались и в опытах и расчетами. А вот история поиска закона преломления света оказалась и более длительной, и несравненно драматичней. Если физикам в их выводах не хватало порой геометрических соображений, то математики зачастую увлекались исключительно формальной стороной вопроса, не обращая внимания на физическую неопределенность вводимых ими понятий. Случалось, что, споря друг с другом, ученые умудрялись доказать то, что надеялись опровергнуть.

Однако взаимодействие наук и в этих спорах приносило весьма ощутимые плоды. Так, установленный в XVII веке Пьером Ферма оптический принцип привел к разработке метода решения экстремальных задач, на нем фактически базировались все дальнейшее развитие лучевой – геометрической – оптики и построение оптики волновой. Достижение Ферма стало родоначальником целого семейства так называемых вариационных принципов в физике.

Не менее удивительные практические результаты принес XX век. Предсказанные, а затем и открытые свойства новых оптических сред – метаматериалов – заставили изменить многие привычные представления. Сегодня физики, инженеры и математики в творческом сотрудничестве создают, манипулируя этими свойствами, новую оптику для микроэлектроники, вычислительных устройств, средств связи, кино-, фото- и видеотехники.

Попробуем и мы оснастить себя «оптическим инструментарием» для подключения к этой увлекательной работе.

Вопросы и задачи

1. Два наблюдателя одновременно определяют на глаз высоту солнца над горизонтом. Один из них находится на берегу реки, другой – под водой. Для кого из них солнце будет казаться выше?

2. Если на сосуд с водой, в который брошено несколько кусочков сахара (без размешивания), упадет узкий луч света, например от лазера, то он искривится. Почему?

3. На дно сосуда с водой положили небольшое тело и накрыли его воронкой, горлышко которой закрыли пальцем. Почему тело не видно, если смотреть сверху, и становится видным, когда вода войдет внутрь воронки?

4. Два концентрических полушара изготовлены из стекол с различными показателями преломления и расположены, как показано на рисунке 1. Постройте дальнейший ход луча *AB*, если отношение радиусов шаров равно отношению их показателей преломления.

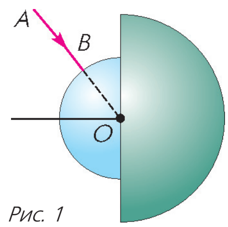


Рис. 1

5. Как построить изображение предмета в плоскопараллельной пластинке с показателем преломления, равным –1?

6. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из равных граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую, непосеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

7. На рисунке 2 показаны положения фокусов тонкой линзы и ход луча после ее прохождения. Постройте ход этого луча до линзы.

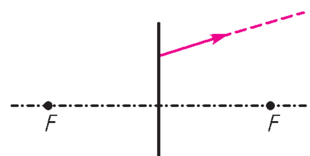


Рис. 2

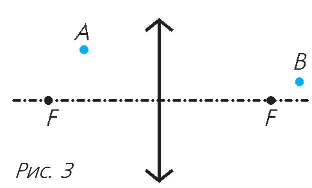


Рис. 3

8. Луч света проходит через точку *A*, преломляется в линзе и проходит через точку *B*, показанные на рисунке 3. Восстановите ход луча.

9. Покажите с помощью построения, как будет распространяться после линзы луч *AB*, изображенный на рисунке 4.

10. На рисунке 5 показаны положения светящихся точек *A* и *B* относительно главной оптической оси

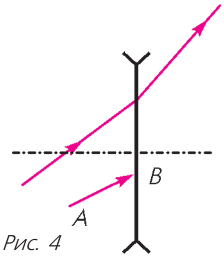


Рис. 4

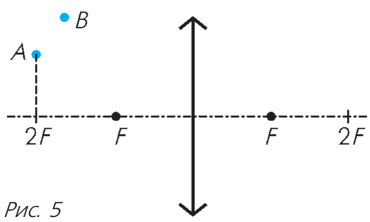


Рис. 5

линзы. Где и как следует расположить экран, чтобы одновременно получить на нем четкие изображения обеих точек?

11. Центр квадрата *ABCD* с длиной стороны *F* находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием *F* на расстоянии 2*F* от нее. Стороны *AB* и *CD* параллельны оси. Постройте изображение квадрата.

12. Рассеивающую линзу с известным расположением фокальных плоскостей распилили по диаметру. Половинки раздвинули по вертикали на небольшое расстояние. Постройте изображения точки *S*, лежащей на оси симметрии системы.

13. Оптическая система дает действительное изображение предмета. Можно ли построением найти такое положение рассеивающей линзы, при котором изображение останется действительным и станет в три раза больше?

Микроопыт

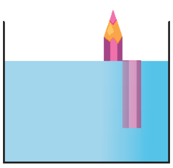


Рис. 6

Убедитесь, что карандаш, погруженный вертикально в стеклянный цилиндрический стакан с водой, имеет вид, показанный на рисунке 6. Объясните явление.

Любопытно, что...

...впервые подробно преломление света описано древнегреческим ученым Клеомедом в I веке новой эры. Ему было известно об изменении угла при переходе луча из более плотной среды в менее плотную и обратно.

...проведение Птолемеем во II веке новой эры опытов по определению величины преломления света при переходе из воздуха в воду, из воздуха в стекло и из воды в стекло — один из чрезвычайно редких примеров, когда ученые древности не удовлетворялись лишь наблюдениями, а прибегали к экспериментам.

...хотя ко времени публикации в 1611 году кеплеровской «Диоптрики» закон преломления света еще не был точно сформулирован, автору этого труда удалось описать свойства различных линз. Впервые было разъяснено, как следует строить изображение, используя ход двух световых лучей и отыскивая пересечение этих лучей или их продолжений.

...в бумагах умершего в 1626 году голландского математика Снеллиуса был найден оптический трактат, содержащий формулировку закона преломления света. В 1637 году появилась первая печатная публикация этого закона в современной форме, принадлежащая французскому ученому Рене Декарту. Французский математик Пьер Ферма свел проблему отыскания закона к решению чисто геометрической задачи. Гораздо более простой вывод закона, использующий, правда, выдвинутый Ферма принцип, дал автор волновой теории света Христиан Гюйгенс.

...сложность вычислений Ферма оказалась связана с отсутствием в то время одного из важнейших математических понятий — производных. Опирающийся на их применение вывод закона Снеллиуса, вошедший в классические учебники, был найден выдающимся немецким ученым Лейбницем в 1684 году.

...сразу после открытия закона преломления света стали предприниматься попытки детального расчета линзовых систем. Так, итальянец Бонавентура Кавальери нашел в 1647 году зависимость фокусного расстояния линзы от кривизны ограничивающих ее поверхностей. Положения изображений в тонких линзах для произвольного положения предмета были геометрически найдены в 1669 году учителем Ньютона Исааком Барроу. А в 1693 году английским исследователем Эдмундом Галлеем была получена алгебраическая формула тонкой линзы.

...еще Леонардо да Винчи в своем «Кодексе о глазе» выдвинул идею о контактных линзах. Применить ее на практике смог только в XVIII веке один из создателей волновой оптики Томас Юнг. Он нанес на глаз английского астронома Джона Гершеля слой прозрачного геля, который позволил устранить у того дефект зрения.

...в развитие геометрической оптики внесли свой вклад такие замечательные математики, как Леонард Эйлер, нашедший в 1766 году связь между показателем преломления вещества призмы, ее преломляющим углом и отклонением светового луча при ее прохождении, и Карл Гаусс, разработавший теорию изображений в параксиальных лучах света — тонких пучках, мало отклоняющихся от оптической оси системы.

...прогресс, достигнутый в материаловедении и приведший к появлению сред с отрицательными преломлением света, позволяет создавать так называемые суперпризмы, способные формировать изображения деталей, более мелких, чем длина волны используемого света, что невозможно для линз с положительным преломлением.

...в отличие от обычной собирающей линзы, в гравитационной линзе, образуемой массивными космическими объектами, сильнее преломляются лучи, проходящие ближе к оси наблюдения, т.е. к притягивающему центру. Недавно галактика, оказавшаяся на пути излучения, испускаемого окружающим черную дыру веществом, усилила это излучение, превратив в четыре источника. Их анализ дал возможность измерить скорость вращения черной дыры, удаленной от нас на шесть миллиардов световых лет.

Что читать в «Кванте» о преломлении света

(публикации последних лет)

1. «Нулевые «линзы» — 2009, №3, с.41;
2. «Увеличительная линейка» — 2010, №5, с.42;
3. «Оптика колбы» — 2011, №1, с.38;
4. «Свет в неоднородной среде» — 2011, №4, с.43;
5. «Решение задач на тонкие линзы» — 2011, №5–6, с.41;
6. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с.112;
7. «Геометрия световых лучей» — 2013, №1, с.55;
8. «Лазерный резонатор» — 2013, №2, с.2.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

гократно обобщен и усилен самим Плаховым. Но следует сказать, что сами по себе тела, невидимые в одном направлении, не были таким уж сюрпризом для оптиков.

Телескоп в космосе. Давайте чуть изменим рисунок 5 и совместим ось вращения с общей осью обеих парабол, проходящей через их общий фокус (рис.8). Полученное в результате вращения тело тоже будет обладать малым сопротивлением. А с оптической точки зрения оно будет представлять реализацию схемы двухзеркального телескопа, предложенной Джеймсом Грегори еще в 1663 году. Правда, Грегори в качестве маленького зеркала использовал дугу эллипса, но понятно, что сколь угодно малое сопротивление можно получить и с помощью малых эллиптических зеркал.

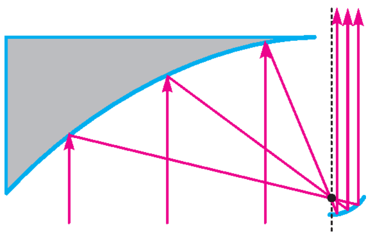


Рис.8. Еще одно тело с малым сопротивлением

Сейчас телескопы запускаются в космос один за другим, правда не из-за малого сопротивления, а по другим причинам. В то же время, сам Плахов в одной из своих последующих работ дает ссылку на статью «Невидимость» (Unsichtbarkeit) из немецкой Википедии, одним из авторов которой является Карл Беднарик.

«Сделанные на коленке». Так Беднарик назвал один из разделов своей статьи «Проблема невидимости». На рисунке 9 представлена одна из иллюстраций с проектом невидимого

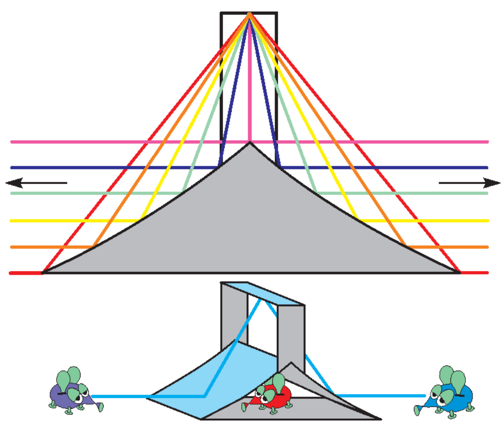


Рис.9. Проект невидимого тела – синий и фиолетовый муффели (придуманные Беднариком существа) смотрят друг на друга и не замечают расположенного между ними красного муффеля

тела, состоящего из двух софокусных параболических зеркал и одного плоского зеркала.

А вот еще одна его схема (рис.10) и сделанное «на коленке» (еще до открытий Плахова) реальное невидимое тело.

Мы тоже смогли воспроизвести в домашних условиях один из экспериментов с невидимым телом Беднарика. А именно, увеличили и распечатали его схему, поставили на нее маленькие зеркала и просветили полученное тело лазерными лучами (рис.11).

Всесторонняя невидимость. Теперь несколько слов о физической реализации абсолютной невидимости. Тело, изображенное на рисунке 7, невидимо в одном направлении. Александр Плахов совместно с Верой Рощиной придумали тело, невидимое в двух направлениях, и это тоже достаточно понятная конструкция. Более того, они смогли придумать

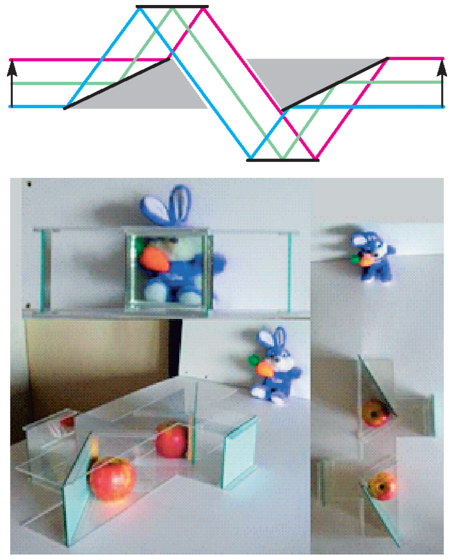


Рис.10. Реальное невидимое тело

тело, невидимое и в трех направлениях, только для этого отражающее тело пришлось раздробить на множество кусочков.

С другой стороны, ими же было доказано, что не существует тела, невидимого в бесконечном числе направлений. Последний результат кажется естественным – все-таки геометрическая оптика, к тому же ограниченная только отражениями, не обладает достаточной гибкостью, она слишком прямолинейна, чтобы с ее помощью можно было добиться полной невидимости.

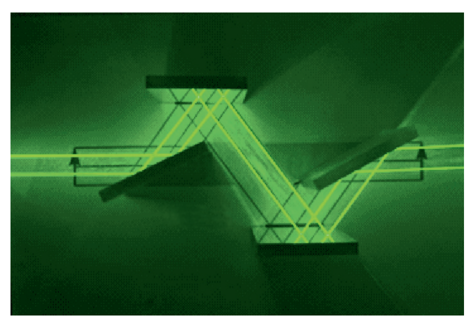


Рис.11. Прохождение световых лучей через невидимое тело

Однако за последние годы у физиков появились новые идеи и новые материалы, позволяющие все-таки надеяться на решение этой проблемы. Над этим сейчас параллельно работают многочисленные группы ученых в разных странах, и непрерывно появляются новые результаты. Кроме световых волн обсуждается невидимость для сейсмических и тепловых волн, речь заходит о движении без сопротивления в жидкостях, и так далее и тому подобное.

Что касается современных исследований именно в области оптической невидимости, то мы рекомендуем читателям популярную книгу Митио Каку «Физика невозможного» (глава «Невидимость»).

А еще стоит посмотреть следующее.

• Недавно появились видеозаписи лекций для школьников самого А.Ю.Плахова, прочитанные им на Малом мехмате в 2015 году: https://vimeo.com/album/2901382/page:6/

• Также есть лекции для студентов и школьников В.Ю.Протасова под названием «Вариационные задачи» (Летняя школа «Современная математика», 2012). Посмотрите третью и четвертую из них:

http://www.mathnet.ru/php/prezentation.phtml&option lang=rus&presentid=5491

http://www.mathnet.ru/php/prezentation.phtml&option lang=rus&presentid=5493

Симедиана

Ю.БЛИНКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЖЕМ ОБ ОДНОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬной линии, связанной с треугольником, – *о симедиане*. Оказывается, симедиана явно или неявно присутствует в огромном числе задач. Она связана с глубокими геометрическими идеями и преобразованиями (инверсия, поляра, двойные отношения). Однако мы постараемся выбирать наиболее доступные, «школьные» подходы. Итак,…

Определение

Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и биссектрису AL (рис.1). Пусть прямая AS симметрична прямой AM относительно прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называется ***симедианой*** треугольника ABC. Иногда симедианой называют прямую, содержащую отрезок AS.

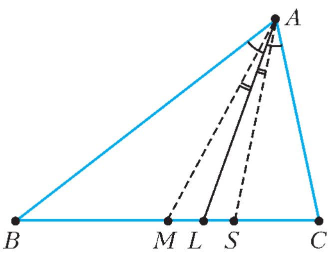


Рис. 1

Антипараллельность

Для дальнейшего знакомства с симедианой нам потребуется одно важное понятие.

Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC. Говорят, что *отрезки B_1C_1 и BC антипараллельны (относительно пары прямых AB и AC, или относительно угла BAC)*, если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков (рис.2,*а–г*).

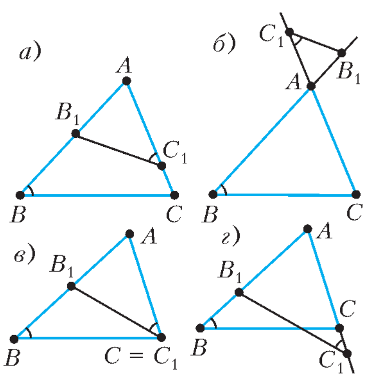


Рис. 2

Упражнения

1. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны (иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A (например, рис. 3).

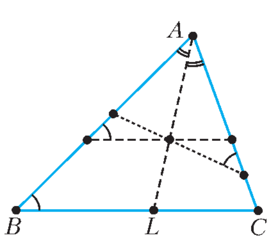


Рис. 3

2. Пусть B_1, C_1, B, C – различные точки. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B, C лежат на одной окружности.

3. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника ABC. Докажите, что отрезки $B'C'$ и BC антипараллельны.

4. Пусть B' и C' – точки на прямых AB и AC такие, что отрезки $B'C'$ и BC параллельны. Докажите, что отрезки $B'C'$ и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны.

Как известно, медиана треугольника ABC делит пополам не только сторону, к которой она проведена, но и любой отрезок, параллельный этой стороне, с концами на двух других сторонах (докажите это!). Оказывается, аналогичное утверждение с заменой параллельности на антипараллельность будет верно для симедианы.

Факт 1. *В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC, с концами на прямых AB и AC соответственно. Прямая AS содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда она делит B_1C_1 пополам.*

Доказательство. Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A. Тогда отрезок B_1C_1 перейдет в отрезок B_2C_2, который параллелен BC, а его середина K_1 – в середину K_2 отрезка B_2C_2 (например, рис. 4). Тогда K_2 лежит на прямой AM, значит, K_1 лежит на прямой AS.

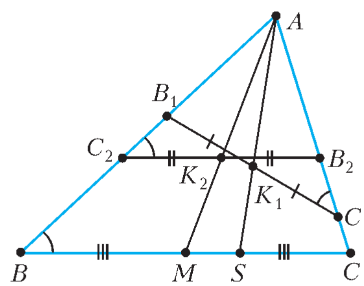


Рис. 4

Комментарий. И наоборот, медиана AM треугольника ABC – симедиана треугольника AB_1C_1.

Другое определение: отношение расстояний и площадей

Известно, что медиана делит сторону и, соответственно, площадь треугольника пополам (или, что то же самое, расстояния от точки M до сторон треугольника обратно пропорциональны этим сторонам).

А в каком отношении делит сторону и площадь треугольника симедиана?

Используем стандартные обозначения для сторон треугольника $AB = c$, $AC = b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X,l)$.

Факт 2. *Пусть точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) AS – симедиана, (2) $\dfrac{d(S;AB)}{d(S;AC)} = \dfrac{c}{b}$ (т.е. расстояния от точки S до сторон треугольника прямо пропорциональны этим сторонам), (3) $\dfrac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, (4) $\dfrac{d(B;AS)}{d(C;AS)} = \dfrac{c^2}{b^2}$, (5) $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{c^2}{b^2}$.*

Доказательство. Пусть AS – симедиана. Проведем к прямым AB и AC перпендикуляры d_c и d_b из середины M отрезка BC и перпендикуляры $d_{c'}$ и $d_{b'}$ из точки S (рис. 5). Так как площади треугольников ABM и ACM равны, то $c \cdot d_c = b \cdot d_b$, значит, $\dfrac{d_b}{d_c} = \dfrac{c}{b}$.

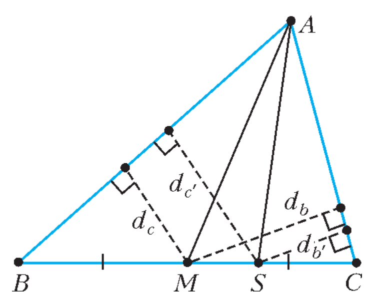


Рис. 5

Среди прямоугольных треугольников с вершиной A есть две пары подобных: с катетами d_c и $d_{b'}$ а также с катетами $d_{c'}$ и d_b. Отсюда следует, что $\dfrac{d_{b'}}{d_c} = \dfrac{AS}{AM} = \dfrac{d_{c'}}{d_b}$, откуда $\dfrac{d_{c'}}{d_{b'}} = \dfrac{d_b}{d_c} = \dfrac{c}{b}$, и мы получили условие (2). Далее, треугольники ABS и ACS имеют общую высоту из вершины A, поэтому $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \dfrac{c \cdot d_{c'}}{b \cdot d_{b'}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, и мы вывели условия (3) и (5).

Предлагаем читателю разобраться с условием (4) самостоятельно.

Упражнение 5. Выведите условие (4) из (3).

Читатель может убедиться, что каждое из условий (2)–(5) влечет (1). Для этого достаточно выполнить следующее упражнение.

Упражнение 6. Докажите, что любое из условий (2)–(5) однозначно определяет точку S на отрезке BC.

Комментарий. Иногда условие (5) используют в качестве определения симедианы.

Симедиана как геометрическое место точек

Пусть через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в некоторой точке R.

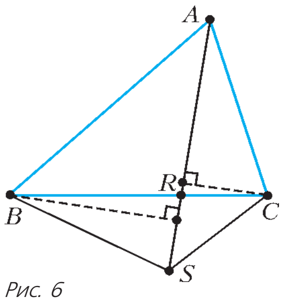


Рис. 6

Заметим, что при движении точки S по прямой AR отношение площадей треугольников ABS и ACS сохраняется и равно отношению перпендикуляров, проведенных к прямой AR из точек B и C (рис.6). В частности $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{S_{ABR}}{S_{ACR}}$. Отсюда несложно получить следующую характеризацию точек, лежащих на симедиане.

Факт 3. *Пусть точка S лежит внутри угла BAC. Тогда эквивалентны следующие условия: (1) прямая AS содержит симедиану, (2) $\frac{d(S;AB)}{d(S;AC)} = \frac{c}{b}$, (3) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$, (4) $\frac{d(B;AS)}{d(C;AS)} = \frac{c^2}{b^2}$.*

Упражнение 7. Проведите полностью рассуждения, позволяющие вывести факт 3 из факта 2.

Теперь можно поискать на симедиане интересные точки.

Симедиана и подобие

В геометрических задачах очень часто возникает следующая конструкция.

Дан остроугольный треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAX = \angle ABX$ (рис.7).

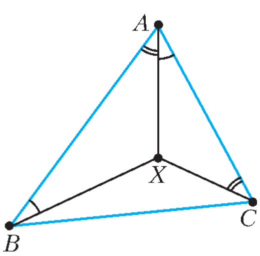


Рис. 7

Факт 4. *В конструкции на рисунке 7 точка X лежит на симедиане.*

Доказательство. Заметим, что треугольники ABX и CAX подобны. Следовательно, отношение высот этих треугольников, проведенных из точки X, равно отношению сторон AB и AC. Теперь остается воспользоваться условием (2) факта 3.

Упражнения

8. Выведите факт 4 из подобия треугольников ABX и CAX и условия (3) факта 3.

9. Выведите факт 4 из подобия треугольников ABX и CAX и свойства биссектрисы (прямая AX содержит биссектрису угла BXC).

10. Докажите, что точка X лежит на окружности, описанной около треугольника BOC (O – центр описанной окружности треугольника ABC).

Гармонический четырехугольник

Гармоническим называют вписанный четырехугольник, у которого произведения противоположных сторон равны.

Добавим в нашу старую конструкцию окружность, описанную около треугольника ABC, и точку D, лежащую на дуге BC, не содержащей точку A (рис.8).

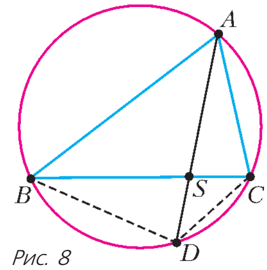


Рис. 8

Факт 5. *Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ гармонический.*

Доказательство. Пусть прямая AD содержит симедиану. Из условия (3) факта 3 $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB^2}{AC^2}$. С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABDC$ вписанный, получим $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin\angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin\angle ACD} = \frac{AB \cdot DB}{AC \cdot DC}$. Следовательно, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, т.е. четырехугольник $ABDC$ гармонический.

Упражнения

11. Докажите обратное утверждение (если $ABDC$ – гармонический, то прямая AD содержит симедиану).

12. Для вписанного четырехугольника $ABDC$ докажите эквивалентность следующих условий:

а) $ABDC$ – гармонический;

б) биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на отрезке BC;

б') биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются на отрезке AD;

в) точка D лежит на окружности Аполлония[1] для точек B и C, проходящей через точку A;

г) диагональ AD содержит симедиану треугольника ABC (или DBC);

г') диагональ BC содержит симедиану треугольника ABD (или ACD);

д) треугольник BDC подобен треугольнику BKA (или AKC), где K – середина AD.

13. Пусть симедиана AS треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что точка X из факта 4 – середина отрезка AD.

Указание: можно воспользоваться условием д) предыдущего упражнения.

Основная задача: симедиана и касательные

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

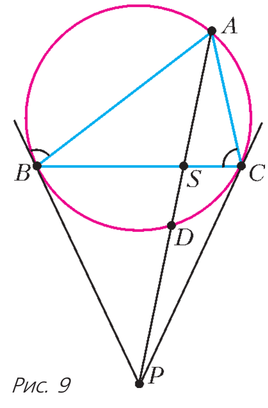


Рис. 9

Факт 6. *Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC (рис.9).*

Доказательство. Запишем отношение площадей и используем угол между касательной и хордой, равенство касательных и теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin\angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin\angle ACP} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin\angle C}{AC \cdot PC \cdot \sin\angle B} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Мы приходим к условию (3) факта 3.

[1] На плоскости даны две точки B и C. Геометрическое место точек M, для которых $BM : CM = k \neq 1$, называется окружностью Аполлония для точек B и C.

Комментарий. На самом деле, основную задачу о симедиане мы встречали в следующей геометрической конструкции. Рассмотрев ее, можно получить другой способ доказательства. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника ABC, M – середина BC. Поскольку $B'C'$ и BC антипараллельны (см. упражнение 3), то AM – симедиана $AB'C'$ (факт 1). С другой стороны, прямые MB' и MC' являются касательными к описанной окружности треугольника $AB'C'$ (докажите!). Следовательно, факт 6 доказан для треугольника $AB'C'$, а значит, и подобного ему треугольника ABC.

Упражнения

14. Как изменится факт 6 для треугольника с прямым углом A?

15. Дан вписанный четырехугольник $ABDC$. Докажите, что касательные к описанной окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются на прямой AD либо параллельны тогда и только тогда, когда касательные к описанной окружности, проведенные в точках A и D, пересекаются на прямой BC либо параллельны

Указание: каждое из этих условий эквивалентно тому, что четырехугольник гармонический.

Найди симедиану!

Рассмотрим несколько задач, в которых могут быть применены перечисленные выше факты. Некоторые из задач весьма сложны, без предварительной подготовки они вызовут затруднения и у искушенных в геометрии. Но можно найти короткие, изящные решения, если умело «играть» с разными свойствами симедианы.

Первая несложная задача показывает, что на самом деле с симедианой, возможно этого не замечая, сталкивался почти любой школьник.

Задача 1. *Докажите, что высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении квадратов катетов.*

Решение. Пусть M – середина гипотенузы AB, CH – высота (рис.10). Тогда $\angle ACH = \angle ABC = \angle BCM$, т.е. CH – симедиана. Используя второе определение симедианы (условие (5) факта 2), получим требуемое.

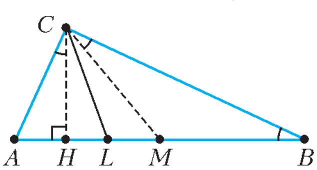


Рис. 10

Комментарий. Стандартное доказательство этого факта – через средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Следующая задача предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2008 году в качестве сложной.

Задача 2. *Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 – середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.*

Решение. Заметим, что A_1C_1 – отрезок, антипараллельный AC (рис.11). Из факта 1 следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы угла ABC, проходит через середину A_1C_1 (точку M).

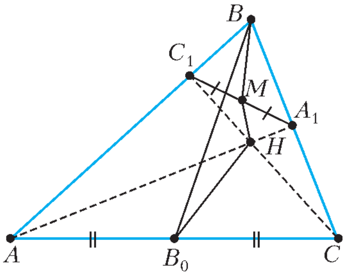


Рис. 11

Аналогично, прямая, симметричная HB_0 относительно биссектрисы угла AHC, проходит через точку M.

Решить следующие три задачи без знания основной задачи (факт 6) весьма непросто.

Задача 3 (Всероссийская олимпиада по математике, 1995). *В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.*

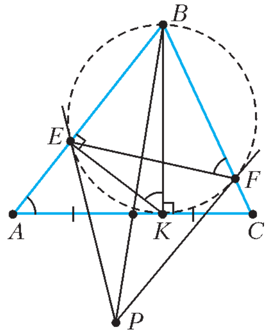


Рис. 12

Решение. Из основной задачи следует, что BP – симедиана в треугольнике BEF (рис.12). Тогда достаточно доказать, что EF антипараллельна AC (см. факт 1). Действительно, $\angle BAK = \angle EKB = \angle EFB$, что и требовалось.

Задача 4. *Две окружности пересекаются в точках M и K. Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что прямые, содержащие медианы всех таких треугольников ABC, проведенные из вершины A, пересекаются в одной точке или параллельны.*

Решение. Заметим, что точки B, M, K и C являются вершинами вписанного четырехугольника (рис.13). Из этого следует, что MK антипараллельна BC, поэтому медиана в треугольнике ABC содержит симедиану треугольника AMK (см. факт 1). Из основной задачи, симедиана треугольника AMK проходит через фиксированную точку P (точку пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках M и K) или перпендикулярна MK, если MK – диаметр первой окружности.

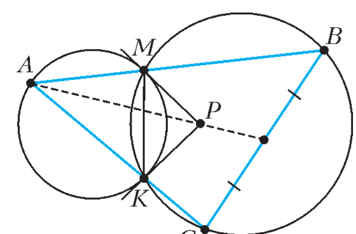


Рис. 13

Отметим, что конструкция, рассмотренная в предыдущей задаче, является частным случай данной конструкции (см. рис. 12 и 13).

А вот еще одна похожая задача.

Задача 5 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2012). *Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.*

Решение. Так как $\angle DCB = \angle BAC$, то BC – антипараллель к AC (рис.14). Далее используем факт 1 и основную задачу.

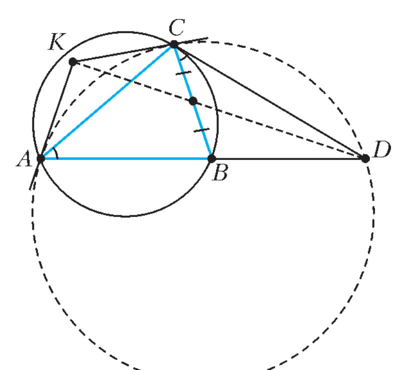


Рис. 14

Теперь рассмотрим известную задачу, которая просто решается при помощи симедианы.

Задача 6 (теорема о симметричной бабочке). *На диаметре KW окружности взята точка M, отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90°$*

(A и D – точки пересечения этих лучей с окружностью – лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD, построенные описанным образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P.

Решение. Проведем через M хорду BC, перпендикулярную KW. Пусть AM пересекает окружность в точке E (рис.15). Тогда $\angle EMW = \angle AMK = \angle DMW$. Следовательно, точки E и D симметричны относительно диаметра KW, т.е. дуги BD и CE, а значит, и углы BAD и CAE равны. Так как AM является медианой треугольника ABC, то AD – симедиана. Используя основную задачу, получим, что AD проходит через точку пересечения касательных, проведенных в точках B и C.

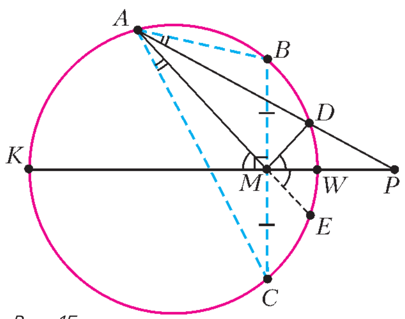


Рис. 15

Решая эту задачу, мы попутно доказали еще один несложный, но важный факт.

Факт 7. *Пусть AM – медиана треугольника ABC, а точка D принадлежит его описанной окружности (см. рис.15). Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда* $\angle AMB = \angle DMB$.

Комментарии

1. Отметим, что этот факт нами уже был практически доказан в упражнении 13, так как точка M совпадает с точкой X из факта 4 (с точностью до обозначений).

2. Используя упражнение 10 или теорему об угле между хордами, можно получить, что $\angle AMB = \angle ACD$.

3. Используя упражнение 10 и инверсию относительно данной окружности, можно получить другое доказательство теоремы о симметричной бабочке.

Задача 7 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2013). *В остроугольном треугольнике ABC высоты* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым* B_1C_1 *и* A_1C_1*, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую* A_1B_1*, проходит через середину отрезка PQ.*

Решение. Так как отрезок A_1B_1 антипараллелен AB относительно угла ACB, то перпендикуляр из точки C на прямую A_1B_1 и высота CC_1 – симметричны относительно биссектрисы угла C (рис.16). Поэтому достаточно доказать, что CH – симедиана в треугольнике PCQ.

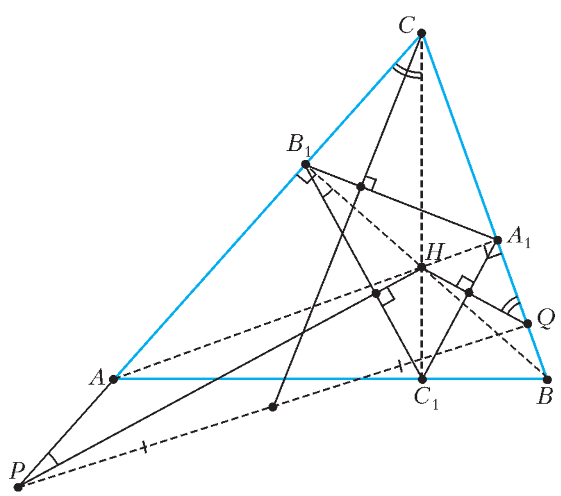


Рис. 16

Используя равенство вписанных углов в окружности, проходящей через точки B, C, B_1, C_1, и прямоугольные треугольники, получим, что $\angle QCH = \angle BCH = \angle BB_1C_1 = \angle CPH$. Аналогично, $\angle PCH = \angle CQH$, т.е. CH – симедиана (см. факт 4 и рис. 7)

Задача 8 (Всероссийская олимпиада по математике, 2009). *В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность* Ω*, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность* ω*, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность* Ω *в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.*

Решение. Докажем, что BF – симедиана (рис.17).

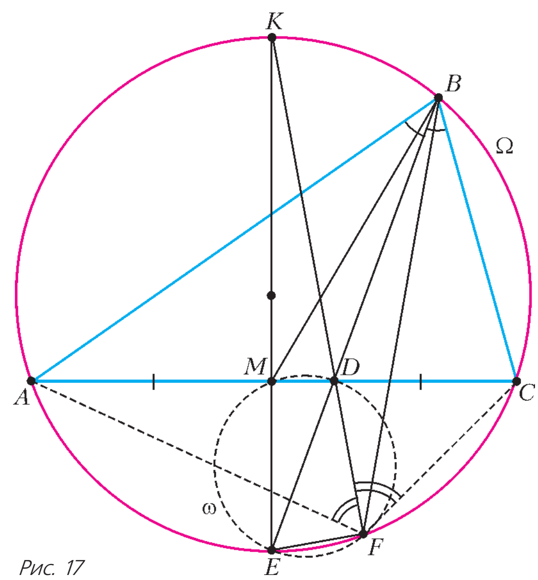


Рис. 17

Пусть K – точка пересечения FD с окружностью Ω. Так как угол EFD прямой, то KE – диаметр окружности, а точка K – середина дуги ABC. В четырехугольнике $ABCF$ биссектрисы углов B и F пересекаются на стороне AC (в точке D), т.е. он гармонический (см. условие б) упражнения 12) и его диагональ BF является симедианой (см. факт 5).

Тем, кто заинтересовался применением свойств симедианы в задачах, предлагаем еще несколько задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

2. Пусть CL – биссектриса угла BCA треугольника ABC, CD – симедиана треугольника ABC. Точка D – пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DL – биссектриса угла BDA.

3. Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.

4. Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K. Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S. Докажите, что BD – симедиана треугольника ABC.

5. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E. Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что AX – симедиана треугольника ABC.

6. Пусть M – середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка K внутри треугольника такова, что $\angle ACK = \angle KBC$. Докажите, что $\angle BKM + \angle AKC = 180^\circ$.

7 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2008). Пусть CC_0 – медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что CC_1 – симедиана треугольника ABC.

8. Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, причем A' – внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центры вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника AXY фиксированы.

9 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2008). Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

10. Докажите, что если из точки D пересечения симедианы CS с описанной окружностью треугольника ABC опустить перпендикуляры DD_1, DD_2 и DD_3 на прямые AC, AB и BC соответственно, то D_2 – середина отрезка D_1D_3.

11 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2004). Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P. Точки X и Y – ортогональные проекции точки P на прямые AC и BC. Докажите, что прямая XY перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из вершины C.

12 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2006). Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

13 (Московская математическая олимпиада, 2007). Точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

14 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2009). К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D – точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB – симедиана треугольника KPL.

15 (Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2014). Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a, параллельная BC. Симедиана треугольника, проведенная из вершины B, вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке D. Прямая CD пересекает прямую a в точке X. Докажите, что углы ABC и AMX, где M – середина AC, равны.

16 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2014). Даны окружность, ее хорда AB и точка W – середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

17 (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2015). В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

Автор благодарен П.А.Кожевникову за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению текста статьи, своему ученику (а теперь уже выпускнику) А.Зерцалову, обсуждения с которым данной темы подтолкнули автора к написанию статьи, и Е.С.Горской за выполнение эскизов рисунков.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Источник в цепи постоянного тока

А.ЧЕРНОУЦАН

Изучение постоянного тока начинается с однородного участка цепи, в котором движение зарядов (носителей тока) поддерживается электростатическим полем. В простейшем случае однородный участок содержит идеальный резистор, ток через который пропорционален приложенной к нему разности потенциалов:

$$U = RI \qquad (1)$$

(хорошо знакомый вам закон Ома для участка цепи). Иными словами, вольт-амперная характеристика – ВАХ – такого элемента представляет собой прямую линию (рис. 1). В действительности зависимость тока от разности потенциалов почти для любого резистора не является линейной, так как при увеличении силы тока резистор нагревается, а сопротивление резистора обычно заметно зависит от температуры. К примеру, сопротивление металлического проводника при нагревании на 100 К возрастает примерно на одну треть, а сопротивление некоторых полупроводников при нагревании, наоборот, уменьшается. Для упрощения задачи обычно оговаривается (или подразумевается), что сопротивление проводника остается постоянным; понятно, что такое приближение является, мягко говоря, не совсем корректным. Не случайно в вопросах и задачах ЕГЭ появляются элементы цепи с нелинейными ВАХ.

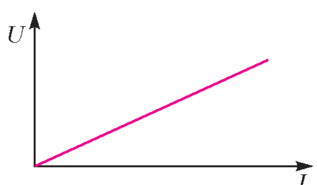


Рис. 1

Энергия, поглощения однородным участком цепи, равна работе электростатических сил над зарядом, прошедшим через любое сечение:

$$W = qU.$$

Соответственно, для мощности поглощения энергии однородным участком цепи можно использовать любое из трех выражений:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (2)$$

Эти выражения остаются в силе и при нелинейной зависимости $U(I)$ – в этом случае сопротивление R надо считать зависящим от силы тока.

Поскольку работа электростатических сил по замкнутому контуру равна нулю, они не могут поставлять энергию в контур и компенсировать потери энергии на нагревание проводников. Поэтому в контуре должны действовать сторонние силы не электростатической природы, полная работа которых положительна. Наличие сторонних сил на неоднородном участке цепи, в котором действуют эти сторонние силы, изображается в виде источника с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 2,*а*).

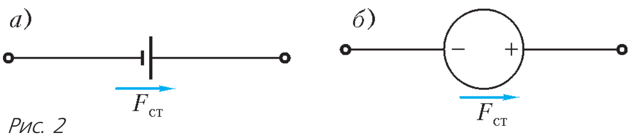


Рис. 2

При этом сторонние силы, действующие на положительный заряд, внутри источника направлены от отрицательного полюса к положительному. (В зарубежной литературе используется другое обозначение – рис. 2,*б*.) Работа и мощность сторонних сил на неоднородном участке выражаются формулами

$$A_{ст} = \pm q\mathscr{E}, \quad P_{ст} = \pm\mathscr{E}I, \tag{3}$$

где знак «+» соответствует прохождению источника в направлении сторонних сил. Сторонние силы могут быть сосредоточены на отдельных участках цепи или распределены по всему контуру (пример – замкнутый виток в переменном магнитном поле).

Вопрос. Может ли существовать замкнутый контур с током, в котором отсутствуют сторонние силы?

Ответ. Может. Например, сверхпроводящий контур, где ток протекает без потерь энергии.

В простой замкнутой неразветвленной цепи действует закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}, \tag{4}$$

где r – внутреннее сопротивление источника, $\mathscr{E}$ – его электродвижущая сила, R – сопротивление внешней цепи (не содержащей источников). Если источников несколько, то в числителе стоит алгебраическая сумма всех ЭДС (с плюсом входят ЭДС источников, где сторонние силы совпадают по направлению с направлением обхода цепи), а в знаменателе – сумма всех сопротивлений. (Если ток получится отрицательным, то это будет означать, что он течет против выбранного направления обхода.)

Короткое замыкание источника соответствует случаю $R = 0$, ток короткого замыкания равен

$$I_{кз} = \frac{\mathscr{E}}{r}.$$

Напряжение на зажимах источника, или разность потенциалов между положительным и отрицательным полюсами, в простейшей схеме можно найти с помощью закона Ома для внешней однородной цепи:

$$U_з = \varphi_+ - \varphi_- = IR = \frac{\mathscr{E}R}{r + R}. \tag{5}$$

Из этой формулы видно, что как в случае разомкнутой цепи $(R \to \infty,\ I \to 0)$, так и в случае идеального источника ($r = 0$) напряжение на зажимах источника равно ЭДС: $\varphi_+ - \varphi_- = \mathscr{E}$. (И в том, и в другом случае электростатические и сторонние силы в каждой точке участка цепи точно компенсируют друг друга, а значит, их работы по переносу пробного заряда одинаковы.)

Из формул (4), (5) можно получить выражение для напряжения на зажимах, в которое не входит сопротивление внешней цепи:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathscr{E} - Ir. \tag{6}$$

Эту формулу называют законом Ома для неоднородного участка цепи (участка, содержащего источник тока). Она работает всегда, независимо от того, что содержится во внешней цепи – простой резистор или другие источники. Удобный прием – представить неоднородный участок цепи в виде идеального источника $(r = 0)$, соединенного последовательно с сопротивлением r (рис.3). Разность потенциалов на

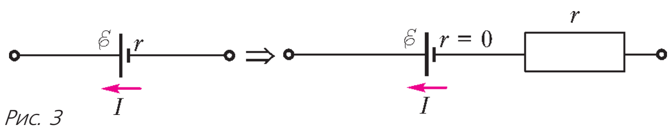


Рис. 3

идеальном источнике равна $\mathscr{E}$ независимо от направления тока, а разность потенциалов на сопротивлении равна $-Ir$, если ток течет в направлении сторонних сил, и $+Ir$, если против (под действием источников во внешней цепи). Во втором случае формула (6) принимает вид

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathscr{E} + Ir. \tag{7}$$

Тепловая мощность тока на неоднородном участке цепи выражается только одной формулой $P_т = I^2 r$ (закон Джоуля–Ленца). Если источник служит для производства (генерации) энергии и передачи ее во внешнюю цепь, то в качестве затраченной (полной) мощности выступает мощность сторонних сил: $P_{полн} = \mathscr{E}I$. Полезная (переданная во внешнюю цепь) мощность равна полной мощности минус потерянная (тепловая):

$$P_{полезн} = \mathscr{E}I - I^2 r = (\varphi_+ - \varphi_-)I \tag{8}$$

(мы воспользовались формулой (6)). Как и формула (6), эта формула носит общий характер, независимо от того, что находится во внешней цепи. Если известно, что внешняя цепь содержит только внешнее сопротивление R, то можно также использовать формулы (2) и (4).

Если же мы рассматриваем участок цепи, потребляющий энергию для совершения работы (мотор), то, как следует из (8), полная поступающая на этот участок мощность выражается формулой $P_{полн} = UI$, а полезная мощность равна

$$P_{полезн} = UI - I^2 R. \tag{9}$$

Эта мощность, как следует из формулы (7), равна $\mathscr{E}I$, причем возникающая в моторе ЭДС «работает» против тока (работа сторонних сил в моторе отрицательна, работа мотора над внешними телами положительна).

Перейдем теперь к решению конкретных задач.

Задача 1. *При замыкании элемента на сопротивление $R_1 = 1{,}8$ Ом в цепи идет ток силой $I_1 = 0{,}7$ А, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2{,}3$ Ом сила тока в цепи $I_2 = 0{,}56$ А. Найдите ток короткого замыкания.*

Решение. Запишем для каждого из случаев закон Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r + R_1},\ I_2 = \frac{\mathscr{E}}{r + R_2}$$

и выразим из этой системы уравнений ЭДС и внутреннее сопротивление источника. Технический совет: удобно выразить из каждого уравнения ЭДС и приравнять их – получим уравнение для r

$$I_1(r + R_1) = I_2(r + R_2).$$

Или можно выразить из каждого уравнения r и приравнять

– получим уравнение для ЭДС

$$\frac{\mathscr{E}}{I_1} - R_1 = \frac{\mathscr{E}}{I_2} - R_2 .$$

В результате найдем

$$r = \frac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2} = 0{,}2\ \text{Ом}, \quad \mathscr{E} = \frac{R_2 - R_1}{1/I_2 - 1/I_1} = 1{,}4\ \text{В} .$$

Ток короткого замыкания будет равен

$$I_{\text{кз}} = \frac{\mathscr{E}}{r} = 7\ \text{А} .$$

Задача 2 (ЕГЭ). *При одном сопротивлении реостата вольтметр показывает $U_1 = 6$ В, амперметр показывает $I_1 = 1$ А (рис. 4). При другом сопротивлении реостата показания приборов $U_2 = 4$ В и $I_2 = 2$ А. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока? Амперметр и вольтметр считать идеальными.*

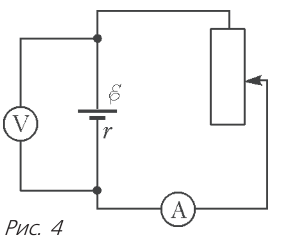


Рис. 4

Решение. Так как во внешней цепи стоит переменное сопротивление, то можно, вычислив $R_1 = U_1/I_1$ и $R_2 = U_2/I_2$, свести задачу к предыдущей. Однако удобнее, воспользовавшись формулой (6), избежать введения новых переменных. Это тем более важно в том случае, когда в условии задачи не указано, из чего состоит внешняя цепь (при токе I_1 напряжение на зажимах источника $U_1,\ldots$). Получаем

$$U_1 = \mathscr{E} - I_1r, \quad U_2 = \mathscr{E} - I_2r , \quad r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = 2\ \text{Ом} .$$

Задача 3. *Три одинаковые батареи с внутренним сопротивлением $r_0 = 6$ Ом каждая замкнули, один раз соединив параллельно, а другой – последовательно, на некоторое сопротивление. При этом сила тока во внешней цепи была в обоих случаях одна и та же. Чему равно внешнее сопротивление?*

Решение. Последовательно или параллельно соединенные источники, аналогично конденсаторам или резисторам, можно заменить одним эквивалентным источником. Отличие состоит в том, что надо вычислить не одну, а две характеристики эквивалентного источника – ЭДС и внутреннее сопротивление. В случае последовательного соединения (рис. 5) токи через источники одинаковы, а разности потенциалов складываются. Записав формулу (6) для

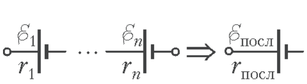


Рис. 5

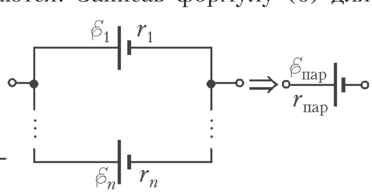


Рис. 6

каждого источника и сложив, придем к ожидаемым формулам:

$$\mathscr{E}_{\text{посл}} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots, \quad r_{\text{посл}} = r_1 + r_2 + \ldots$$

В случае параллельного соединения (рис. 6) разности потенциалов одинаковы, а токи складываются. Выразив из уравнений (6) токи и сложив, придем к таким формулам:

$$\mathscr{E}_{\text{пар}} = \frac{\mathscr{E}_1/r_1 + \mathscr{E}_2/r_2 + \ldots}{1/r_1 + 1/r_2 + \ldots}, \quad \frac{1}{r_{\text{пар}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots \qquad (10)$$

Вторая формула выглядит ожидаемо, а первая – очень громоздко, но она резко упрощается в случае одинаковых ЭДС. Если $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \ldots = \mathscr{E}_n$, то сразу получим $\mathscr{E}_{\text{пар}} = \mathscr{E}_0$. Смысл такого результата ясен – заряд, который проходит через эквивалентный источник, делится между источниками, но каждая из частей все равно пройдет через источник с ЭДС $\mathscr{E}_0$.

В нашей задаче получим

$$\mathscr{E}_{\text{посл}} = n\mathscr{E}_0,\ r_{\text{посл}} = nr_0,\ \mathscr{E}_{\text{пар}} = \mathscr{E}_0,\ r_{\text{пар}} = \frac{r_0}{n} ,$$

где $n = 3$. Приравнивая токи, придем к уравнению

$$\frac{n\mathscr{E}_0}{nr_0 + R} = \frac{\mathscr{E}_0}{\dfrac{r_0}{n} + R} ,$$

откуда найдем, что при любом n

$$R = r_0 = 6\ \text{Ом} .$$

Задача 4. *Два источника тока, первый с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 2$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 1$ Ом, второй с ЭДС $\mathscr{E}_2 = 5$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}5$ Ом, соединяют одноименными полюсами, образуя замкнутую цепь (рис. 7). Чему равна разность потенциалов между положительным и отрицательным полюсами каждого источника?*

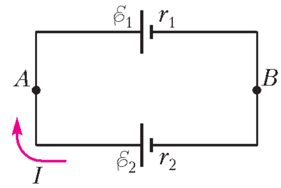


Рис. 7

Решение. Поскольку во внешней цепи каждого из источников стоит не резистор, а другой источник, то не получится найти разность потенциалов на зажимах с помощью формулы (1), и необходимо будет использовать формулу (6). Силу тока в цепи найдем из формулы (4):

$$I = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{r_1 + r_2} ,$$

ток протекает по часовой стрелке (в направлении сторонних сил второго источника). Для нахождения разности потенциалов можно использовать любое из уравнений

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}_1 + Ir_1, \quad \varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}_2 - Ir_2 ,$$

каждое из которых приводит к результату

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathscr{E}_1r_2 + \mathscr{E}_2r_1}{r_1 + r_2} = 4\ \text{В}.$$

Задача 5. *Два источника тока, первый с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 6$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 1$ Ом, второй с ЭДС $\mathscr{E}_2 = 8$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 4$ Ом, соединяют последовательно и замыкают на некоторое внешнее сопротивление. При каком значении этого сопротивления напряжение на зажимах одного из источников будет равно нулю?*

Решение. На первый взгляд, в задаче может быть два ответа – в зависимости от того, на каком из источников напряжение равно нулю. Однако оказывается, что может реализоваться только один вариант.

Предположим, что равна нулю разность потенциалов на зажимах первого источника. Это значит, что $\mathscr{E}_1 - Ir_1 = 0$, т.е. ток в цепи равен току короткого замыкания первого источника: $I = \mathscr{E}_1/r_1$. Подставляя этот ток в закон Ома для полной цепи (формула (4)), выразим R:

$$R = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1}r_1 - r_2 .$$

Это выражение положительно, если $\mathscr{E}_2/r_2 > \mathscr{E}_1/r_1$, т.е.

$I_{кз2} > I_{кз1}$. Вывод: можно занулить напряжение на зажимах того из источников, у которого меньше ток короткого замыкания. В данном случае это не первый, а второй источник. Разность потенциалов на его зажимах обратится в ноль при

$$R = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} r_2 - r_1 = 2\,\text{Ом}.$$

Вопрос. Может ли в замкнутой цепи разность потенциалов на зажимах всех источников равняться нулю?

Ответ. Может. Самый простой и известный пример: цепь, состоящая только из n одинаковых последовательно включенных источников. Более общий случай: источники могут быть разными, но у них должны быть одинаковые токи короткого замыкания.

А теперь – несколько задач на закон сохранения энергии.

Задача 6. *Лампочки, сопротивления которых $R_1 = 3$ Ом и $R_2 = 12$ Ом, поочередно подключенные к источнику тока, потребляют одну и ту же мощность. Во сколько раз КПД источника тока во втором случае больше, чем в первом?*

Решение. Приравняем тепловые мощности, выделяемые во внешней цепи, для различных внешних сопротивлений:

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{r + R_1}\right)^2 R_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{r + R_2}\right)^2 R_2.$$

Из этого уравнения, после преобразований, найдем внутреннее сопротивление источника:

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

КПД источника можно выражать через разные параметры, нам удобна формула

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r}$$

(полная мощность источника равна тепловой мощности, выделяющейся на всех сопротивлениях цепи). Получаем

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{R_2}{R_2 + \sqrt{R_1 R_2}} : \frac{R_1}{R_1 + \sqrt{R_1 R_2}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = 2.$$

Задача 7 (ЕГЭ). *Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Сопротивление реостата можно изменять в пределах от 1 Ом до 5 Ом. Чему равна максимальная мощность тока, выделяемая на реостате?*

Решение. Так как в данном случае во внешней цепи стоит сопротивление (реостат), то можно исследовать на максимум зависимость полезной мощности от внешнего сопротивления. Однако математически проще исследовать зависимость полезной мощности от силы тока: $P(I) = \mathcal{E}I - I^2 r$ (формула (8)). К тому же эта формула носит более общий характер, она применима при любом содержании внешней цепи. Эту зависимость можно легко исследовать с помощью производной, но полезней сделать это графически. График $P(I)$ – парабола (рис. 8), пересекающая ось абсцисс в точках $I_1 = 0$ и $I_2 = \mathcal{E}/r$ (ток короткого замыкания), а значит, имеющая максимум посередине между ними, т.е. при

$$I_m = \frac{\mathcal{E}}{2r}. \qquad (11)$$

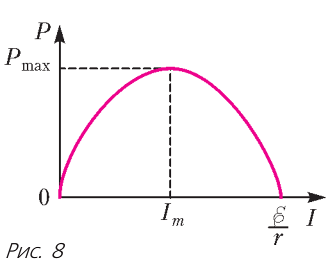


Рис. 8

Подставляя это выражение в зависимость $P(I)$, находим максимальное значение полезной мощности:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}. \qquad (12)$$

Сравнивая формулу (11) с законом Ома для полной цепи, видим, что максимум полезной мощности достигается при значении внешнего сопротивления, равном внутреннему сопротивлению источника: $R_m = r$. Этот факт (сам по себе важный и интересный) имеет дополнительное значение для данной задачи: сопротивление $R_m = r = 2$ Ом находится внутри заданного диапазона сопротивлений (от 1 Ом до 5 Ом). Поэтому максимум полезной мощности в заданном диапазоне равен

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 4{,}5\,\text{Вт}.$$

Задача 8. *При силе тока в цепи $I_1 = 2$ А полезная мощность батареи $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 4$ А ее полезная мощность $P_2 = 16$ Вт. Какую наибольшую полезную мощность может дать эта батарея?*

Решение. Запишем формулу (8) для полезной мощности источника в первом и во втором случаях:

$$P_1 = \mathcal{E}I_1 - I_1^2 r, \quad P_2 = \mathcal{E}I_2 - I_2^2 r,$$

Перейдем к числам и найдем ЭДС и внутреннее сопротивление источника:

$$\mathcal{E} = 6\ \text{В},\ r = 0{,}5\ \text{Ом}.$$

Подставив эти значения в формулу (12) (на экзамене необходимо воспроизвести ее вывод), получим

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 18\,\text{Вт}.$$

Задача 9. *Электродвигатель трамвайного вагона работает при силе тока $I = 100$ А и напряжении $U = 500$ В. При силе тяги двигателя $F = 4$ кН скорость вагона $v = 18$ км/ч. Чему равно сопротивление обмотки двигателя?*

Решение. Полезная мощность участка цепи, поглощающего электрическую энергию для совершения работы, выражается формулой (9): $P = UI - I^2 R$, где R – сопротивление обмотки мотора. Приравнивая это выражение к механической мощности трамвая $P = Fv$, найдем сопротивление обмотки:

$$R = \frac{UI - Fv}{I^2} = 3\,\text{Ом}.$$

Упражнения

1. Амперметр с внутренним сопротивлением 2 Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает силу тока 5 А. Вольтметр с внутренним сопротивлением 150 Ом, подключенный к зажимам такой же батареи, показывает 12 В. Найдите силу тока короткого замыкания батареи.

2. Два источника тока, первый с ЭДС 5 В и внутренним сопротивлением 1 Ом, второй с ЭДС 3 В и внутренним сопротивлением 3 Ом, соединяют последовательно и замыкают на внешнее сопротивление 12 Ом. Во сколько раз разность потенциалов на первом источнике больше, чем на втором?

3. Батарея состоит из последовательно соединенных между собой элементов с внутренним сопротивлением 0,2 Ом и ЭДС 0,5 В каждый. При силе тока во внешней цепи 2 А полезная мощность батареи 1 Вт. Сколько в батарее элементов?

4. Полезная мощность батареи равна 6 Вт при двух значениях силы тока в цепи: 2 А и 6 А. Чему равна максимальная полезная мощность этой батареи?

5. Электромотор поднимает груз массой 50 кг со скоростью 2 м/с. При каком напряжении работает мотор, если по его обмотке сопротивлением 12 Ом течет ток силой 10 А?

XXXVI Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трех цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.)

Е.Бакаев

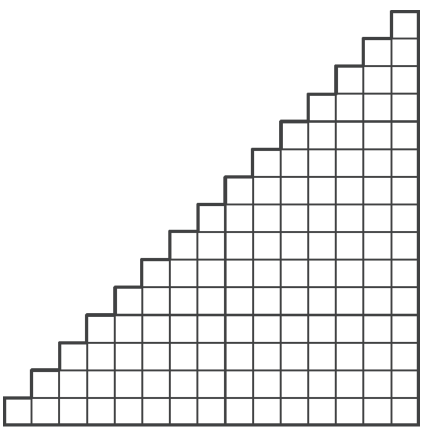
2 (4). На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом.

Е.Бакаев

3 (4). Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Н.Авилов

4 (4). На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток.



Е.Бакаев

5 (5). См. задачу М2389 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1 (3). Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Н.Авилов

2 (4). Ковер имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

И. Акулич

3 (4). См. задачу М2389 «Задачника «Кванта».

4 (5). Точки K и L делят медиану AM треугольника ABC на три равные части, точка K лежит между L и A. Отметили точку P так, что треугольники KPL и ABC подобны $\left(\frac{KP}{AB}=\frac{PL}{BC}=\frac{KL}{AC}\right)$, причем точки P и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AM. Докажите, что точка P лежит на прямой AC.

Е.Бакаев

5 (5). По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

Г.Жуков

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку, соединяющему середины отрезков AE и BC.

Е.Бакаев

2 (6). Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи – болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть – внутри. Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор все время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту когда шпион обошел весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Е.Бакаев

3. а) (3) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра – единица?

б) (4) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.

Е. Бакаев

4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит еще хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника:

а) (4) не превосходить девяти;

б) (5) не превосходить восьми?

Е.Бакаев

5. а) (3) См. задачу М2392,а «Задачника «Кванта».

б) (6) См. задачу М2392,б «Задачника «Кванта» (для таблицы 10×10 вместо 100×100).

6 (9). Внутри окружности расположен выпуклый равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в

---

[1] В скобках после номера задачи указано максимальное число баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.

обоих направлениях до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Фольклор, предложил Г.Гальперин

7. (10) Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император – нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император в каком хочет порядке задает каждому волшебнику по вопросу (требующему ответа «да» или «нет») и слушает ответ, а после всех ответов одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И.Митрофанов

10–11 классы

1. а) (2) См. задачу 3,а для 8–9 классов.
б) (3) См. задачу 3,б для 8–9 классов.

2 (5). См. задачу М2391 «Задачника «Кванта».

3. а) (2) См. задачу М2392,а «Задачника «Кванта».
б) (6) См. задачу М2392,б «Задачника «Кванта».

4 (8). См. задачу 6 для 8–9 классов.

5 (10). Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но при этом у их произведения модули всех коэффициентов не больше 1?

А.Канель-Белов

6 (10). См. задачу М2394 «Задачника «Кванта».

7 (10). См. задачу М2395 «Задачника «Кванта».

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. См. задачу М2390 «Задачника «Кванта».

2. Треугольники ABC и ADE таковы, что E лежит на луче AB, а D лежит на луче AC. Оказалось, что биссектрисы BX и DY этих треугольников перпендикулярны. Докажите, что XY параллельно EC.

В.Мокин

3. Изначально в бизнес-центре базировались 2^n фирм, каждая занимала некоторую площадь, все площади были различны. Каждый год фирмы объединялись в пары, и в каждой паре фирма с меньшей площадью присоединялась к фирме с большей. При этом ни в какой момент времени не было двух фирм с одинаковой площадью. Через n лет осталась одна фирма. Какое наименьшее место по площади (считая от меньшей к большей) эта фирма могла занимать вначале?

Б.Френкин

4. См. задачу М2393 «Задачника «Кванта».

5. В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.

М.Евдокимов

6. Два дворца спорта набрали школьников в секции. В каждой секции первого дворца не меньше чем по n детей, а в каждой секции второго – не меньше чем по k детей. Оказалось, что каждый школьник посещает столько же секций в первом дворце, сколько и во втором. Кроме того, в любых двух секциях из разных дворцов есть не более одного общего школьника. Докажите, что в первый дворец попало не меньше nk детей.

Н.Верещагин, А.Ромащенко

Публикацию подготовили И.Богданов, С.Дориченко, Л.Медников, И.Рубанов, А.Семенов, Б.Френкин, А.Шаповалов

Избранные задачи LXXVIII Московской математической олимпиады

1 (6 класс). Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нем картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рисунок) Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

Т.Голенищева-Кутузова

2 (7 класс). Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2015: а) за 4 операции; б) за 3 операции?

И.Ященко

3 (7 класс). Петя записал 25 чисел в клетки квадрата 5×5. Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех ее соседях по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке?

Е.Бакаев

4 (8 класс). Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре различные цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти.

М. Евдокимов

5 (8 класс). Будем называть натуральное число почти квадратом, если это либо точный квадрат (т.е. квадрат целого числа), либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

Д.Креков

6 (8 класс). В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

А.Якубов

7 (9 класс). По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что любое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечетных числа. Какой четности может быть число k?

Б.Френкин

8 (9 класс). Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

Е.Бакаев

9 (9 класс). Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

М.Евдокимов

10 (10 класс). По целому числу a построим последовательность $a_1 = a$, $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = 1 + a_1a_2$, $a_4 = 1 + a_1a_2a_3$, … (каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседних членов ($a_{n+1} - a_n$) — квадраты целых чисел.

Д.Креков

11 (10 класс). В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n > 1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ею очков к количеству сыгранных ею игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

А.Блинков, А.Заславский, А.Антропов

12 (10 класс). Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

М.Евдокимов

13 (10 класс). Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

Ф.Ивлев

14 (11 класс). Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \le n \le 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}.

С.Гашков

15 (11 класс). В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырехзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

М.Евдокимов

16 (11 класс). Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $\frac{1}{n}$.

А.Шаповалов

17 (11 класс). Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида $\boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}$ было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$.

О.Косухин

18 (11 класс). Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

А.Бегунц

19 (11 класс). Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x} = 0$ так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

А.Бегунц, Д.Горяшин

20 (11 класс). У Ивана-Царевича есть два сосуда емкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объем жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

П.Бородин

21 (11 класс). День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льет дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские ученые установили, что день 1 января всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

И.Высоцкий

22 (11 класс). На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделенные друг от друга океаном. Назовем точку океана особой, если для нее найдутся не менее трех ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причем все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

П.Бородин

Публикацию подготовили С.Дориченко, Е.Епифанов

Московская физическая олимпиада 2015 года

Первый теоретический тур

7 класс

1. Школьницы Алиса и Василиса участвуют в лыжных гонках. Сразу после старта лыжницам пришлось подниматься в горку. Алиса, скорость которой на подъеме составляла 8 км/ч, отстала от Василисы, поднимавшейся со скоростью 12 км/ч. Спустя километр подъем закончился, и Алиса со скоростью 20 км/ч устремилась в погоню за Василисой, двигавшейся со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние надо будет пройти Алисе по горизонтальной лыжной трассе, чтобы догнать Василису?

Д.Азнауров, О.Шведов

2. Стробоскоп представляет собой диск с небольшим отверстием в центре и механизмом подсветки (рис.1). В момент, когда подсветка включается на короткий промежуток времени, можно увидеть предмет, находящийся позади отверстия. За стробоскопом на движущейся ленте установлены шарики, расположенные на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга. Найдите все возможные скорости ленты, при которых каждый шарик можно наблюдать в отверстие. Частота мигания подсветки – 1 раз за 0,5 с.

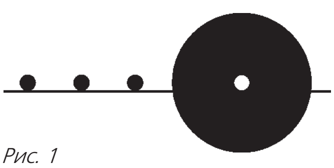


Рис. 1

Д.Азнауров

3. Часовая стрелка на больших башенных часах в самом широком месте имеет ширину H = 13 футов. От концов отрезка такой ширины на часовой стрелке до оси циферблата часов расстояние составляет $L = 25$ футов. Минутная стрелка на таком же расстоянии от оси циферблата имеет ширину h = 5 футов. Стрелки движутся плавно (без скачков). Определите, за сколько секунд минутная стрелка обгоняет часовую (во время обгона она частично закрывает часовую стрелку). Считается, что обгон начинается в момент, когда минутная стрелка начинает закрывать часовую стрелку в ее самом широком месте, а заканчивается, когда стрелки перестают перекрываться в этом месте для наблюдателя, смотрящего на часы издалека.

Справка. Длина окружности радиусом R равна $2\pi R$, где $\pi \approx 3{,}14$.

С.Варламов

4. Для строительства дома требуется смесь песка со щебнем и цемента общей массой 28 тонн, содержащая цемент и песок со щебнем в отношении 1:8 (по объему). На стройке уже имеется 3 тонны песка со щебнем и 3 тонны цемента, а остальные материалы хранятся на складе недалеко от стройплощадки.

1) Сколько тонн песка со щебнем и сколько тонн цемента требуется для строительства дома?

2) Сколько поездок потребуется совершить, чтобы доставить недостающие строительные материалы, если вместимость кузова электрокара, в котором их будут перевозить, составляет 400 литров?

Плотность смеси песка со щебнем $1{,}6\ г/см^3$, а цемента $1{,}2\ г/см^3$. За один раз можно перевозить только один вид стройматериалов (иначе они будут смешиваться прямо в кузове в неправильной пропорции).

И.Маслов

8 класс

1. Школьник Вова в 10 ч 46 мин выехал из дома покататься на велосипеде. В 11 ч 30 мин из сообщения, полученного на мобильный телефон, он узнал, что пора возвращаться обратно. Проехав вперед еще 900 м, Вова развернулся и приехал домой в 12 ч 20 мин. Найдите скорость движения Вовы на велосипеде, считая ее постоянной.

М.Ромашка

2. С какой вертикально направленной силой F следует удерживать груз массой m_1 для того, чтобы изображенная на рисунке 2 конструкция из блока, невесомых нитей, легкого стержня и грузов находилась в равновесии? Массы грузов $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $M = 3$ кг. Трения в оси блока нет. Ускорение свободного падения g принять равным $10\ м/с^2$.

И.Маслов, О.Шведов

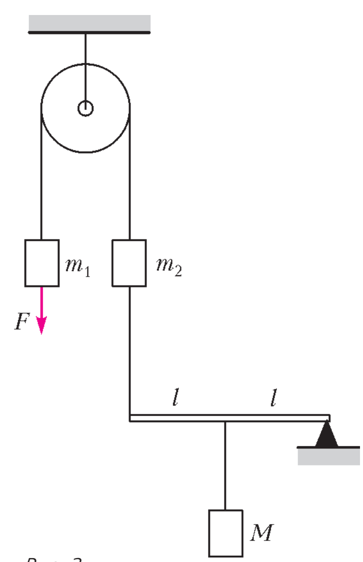


Рис. 2

3. Кубик из пластилина с длиной ребра 4 см, в котором есть внутренняя полость, держится в жидкости на плаву, погружаясь в нее на 1/24 своего объема. Если этот пластилиновый кубик смять и снова вылепить из него кубик, но уже без полости, то новый кубик держится на плаву, погружаясь на 8/9 своего объема. Считая, что при плавании верхняя грань кубика без полости горизонтальна, найдите, на сколько миллиметров он выступает из жидкости. Плотность пластилина при лепке не меняется.

И.Маслов

4. Туристы развели костер и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками, заполнив котелок на $n = 3/4$ его объема. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра, и спустя $t_1 = 10$ мин после начала кипения количество воды в котелке уменьшилось на $\eta_1 = 34\%$. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костер, поскольку группа людей с продуктами задерживалась. За следующие $t_2 = 8$ мин количество воды в котелке уменьшилось еще на $\eta_2 = 8\%$ от своего первоначального значения. Известно, что пустой котелок, поставленный вертикально на землю, наполнился бы под дождем доверху за время $t_3 = 64$ мин. Определите температуру дождевых капель до их попадания в котелок. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность все время поддерживается постоянной и интенсивность дождя не меняется.

М.Ромашка

9 класс

1. Мячик бросают с начальной скоростью v с поверхности земли под углом α к горизонту. В момент нахождения мячика на максимальной высоте из той же точки на поверхности земли бросают камень под углом β к горизонту. Размеры мячика и камня малы, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) Определите, с какой начальной скоростью u бросили камень, если он столкнулся с мячиком во время его полета.

2) Найдите время движения камня от момента его броска до момента столкновения с мячиком.

Л.Арзамасский

2. На горизонтальном глинистом дне водоема стоит кубик с длиной ребра a и плотностью ρ. Высота уровня воды над верхней гранью кубика равна H. В начальный момент времени воды под кубиком нет. Вода начинает очень медленно подтекать под кубик. Чему будет равна площадь S части нижней грани, которая останется сухой к моменту, когда кубик начнет всплывать? Плотность воды $\rho_в$, кубик легче воды.

Е.Мажник

3. Для изготовления нагревательной спирали кипятильника взяли проволоку длиной l_1. После подключения этого кипятильника к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением на нагревание некоторой массы воды в калориметре на 50 °С было затрачено время $\tau_1 = 2$ мин. Затем проволоку, из которой была сделана спираль кипятильника, расплавили и изготовили из расплава новую проволоку длиной $l_2 = 2l_1$. Из новой проволоки сделали другую спираль для кипятильника, опустили его в другой калориметр с другим количеством воды и подключили кипятильник к тому же источнику напряжения. На нагревание воды на 50 °С во втором калориметре было потрачено время $\tau_2 = 12$ мин. Во сколько раз масса воды во втором калориметре отличается от массы воды в первом калориметре? Считайте, что потерь тепла при нагревании воды не происходит, теплоемкости калориметров пренебрежимо малы, а плотность и проводимость металла после переплавки остаются прежними.

Е.Якута

4. Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке 3, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно $R_1 = 730$ Ом. После того как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным $R_2 = 1360$ Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.

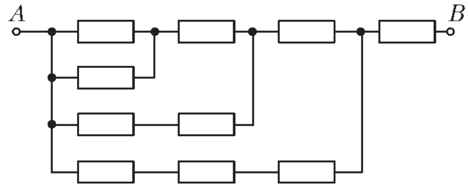


Рис. 3

М.Ромашка

10 класс

1. По спокойной поверхности озера плывет маленький катер, траектория которого параллельна прямой линии берега и лежит от него на расстоянии L (рис.4). Стоящий в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересек прямую AB, перпендикулярную берегу. После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера, считая, что волны, возбуждаемые катером на поверхности воды, близки к гармоническим.

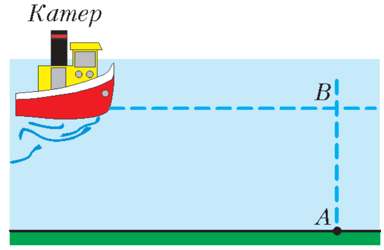


Рис. 4

М.Ромашка

2. В вертикальной плоскости закреплено круглое кольцо радиусом R, на которое в верхней точке надета бусинка массой m. После небольшого толчка бусинка начинает соскальзывать вниз по кольцу под действием силы тяжести. Всеми силами трения можно пренебречь.

1) С какой силой бусинка давит на кольцо в точке, лежащей на его горизонтальном диаметре?

2) Чему равен модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо?

М.Семенов

3. На водопроводном смесителе установлены два крана – холодный и горячий. Краны одинаковы по своей конструкции – она такова, что количество воды, протекающее через каждый кран за одну секунду, пропорционально углу поворота крана при его открывании. Если повернуть холодный кран на угол $\alpha_1 = 180°$, а горячий кран на угол $\beta_1 = 60°$, из смесительного крана потечет вода с температурой $t_1 = 36$ °С. Если же повернуть холодный кран на угол $\alpha_2 = 120°$, а горячий кран на угол $\beta_2 = 90°$, то из смесительного крана потечет вода с температурой $t_2 = 48$ °С. Найдите температуру воды, текущей из смесительного крана, когда холодный кран повернут на угол $\alpha_3 = 160°$, а горячий на угол $\beta_3 = 80°$. Потерями тепла в смесителе пренебречь.

М.Ромашка

4. В нижней части вертикального цилиндрического сосуда, разделенного подвижным легким поршнем, находится аргон. Верхняя часть сосуда полностью заполнена водой массой $m = 1$ кг и открыта в атмосферу. При температуре $t_1 = 27$ °С поршень расположен на высоте, составляющей $1/4$ высоты сосуда. После нагревания всей системы до температуры $t_2 = 127$ °С равновесие достигается при расположении поршня на $1/2$ высоты сосуда. Найдите площадь S

поперечного сечения сосуда и высоту H сосуда. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Абсолютный ноль считайте равным $t_0 = -273$ °C, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Д.Азнауров

5. Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке 3, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно $R_1 = 219$ Ом. После того как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным $R_2 = 255$ Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.

М.Ромашка

11 класс

1. Вдоль направления течения прямой реки по спокойной воде плывет маленький катер, траектория которого параллельна берегу и лежит на расстоянии L от него (рис.5).

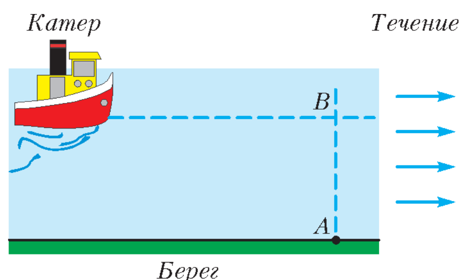


Рис. 5

Скорость течения реки равна v. Стоящий на берегу в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересек прямую AB, перпендикулярную берегу. После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера относительно воды, считая, что волны, возбуждаемые катером на поверхности воды, близки к гармоническим.

М.Ромашка

2. Цилиндрическое бревно радиусом r, ось которого горизонтальна, неподвижно закреплено. На бревно надет тонкий однородный обруч массой m и радиусом R так, как показано на рисунке 6 слева. Обруч вывели из положения равновесия, отклонив его в плоскости рисунка так, что прямая, соединяющая центр обруча и точку касания обруча с бревном, образовала угол α с вертикалью (см. рис. 6 справа), и отпустили. В процессе возникших после этого колебаний обруч движется по бревну без проскальзывания.

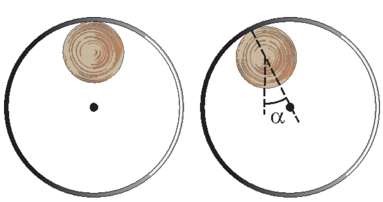


Рис. 6

1) Найдите скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия.

2) Найдите модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия.

М.Ромашка

3. Туристы развели костер и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра, и спустя время $\tau = 8$ мин после начала кипения уровень воды в котелке уменьшился на $h = 2{,}5$ см. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костер, поскольку группа людей с продуктами задерживалась. В каждом кубометре воздуха находится $n = 200$ дождевых капель, которые падают вертикально с постоянной скоростью $v = 9$ м/с. Температура каждой капли $t_0 = 20$ °C, а ее масса $m_0 = 50$ мг.

1) Будет ли вода в котелке продолжать кипеть после начала дождя? Ответ обоснуйте.

2) Как и за какое время после начала дождя уровень воды в котелке изменится еще на $H = 1$ см?

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность все время поддерживается постоянной.

М.Ромашка

4. См. задачу 5 для 10 класса.

5. Шар радиусом R с зеркальной поверхностью освещают широким параллельным пучком света. Какую часть шара и каким образом нужно покрасить черной краской, чтобы сила светового давления на шар оказалась максимальной?

Г.Гайдуков, И.Горбатый

Второй теоретический тур

7 класс

1. Тренер проводит занятия по физкультуре необычным способом. Сам он начинает идти по кругу стадиона с постоянной скоростью $u = 1$ м/с. За тренером в тот же момент по кругу стадиона начинает бежать его ученик, который все время движется с постоянной скоростью $v = 3$ м/с. Когда ученик достигает тренера, он быстро разворачивается, возвращается обратно, добирается до старта, снова быстро разворачивается, опять бежит до тренера и далее повторяет эти действия нужное число раз. В конечном итоге тренер и ученик пришли к финишу одновременно, причем тренер прошел менее одного круга.

1) Какой путь s_1 пробежал ученик к моменту первой встречи с тренером?

2) Какой путь s_2 пробежал ученик до момента финиша?

Длина окружности стадиона от старта до финиша $L = 400$ м. В момент старта ученика и тренера длина дуги окружности между ними была $D = 100$ м. Ученик начинает бежать с линии старта, которая совпадает с линией финиша.

Е.Мажник

2. Школьник Николай проводит опыт по наполнению сосуда водой. Когда Николай открыл кран с горячей водой, электронные часы показывали 07:03. Когда сосуд заполнился на четверть (часы показывали 07:10), Николай дополнительно открыл кран с холодной водой. Когда сосуд заполнился до половины (на часах было 07:13), Николай закрыл кран с горячей водой. Каким может быть показание часов, когда сосуд заполнится полностью? При решении учитывайте, что часы показывают, например, время 07:03 в моменты времени от 7 ч 03 мин 00 с до 7 ч 03 мин 59,9999... с, а затем показание часов скачком изменяется на 07:04. Открывание и закрывание кранов производится очень быстро.

А.Фролов

3. Вася наполнил две одинаковые легкие пластиковые бутылки емкостью 1 л каждая кварцевым песком по самое горлышко и взвесил их. Получились одинаковые массы по 1530 г. Затем Вася аккуратно пересыпал песок из одной бутылки в пакет, заполнил бутылку наполовину водой и медленно высыпал весь песок из пакета обратно в эту бутылку, которая снова оказалась заполненной по самое горлышко смесью песка с водой. Весы показали массу бутылки 1866 г. Какова плотность кварца?

С.Варламов

4. В 1802 году Гей-Люссак, исследуя тепловое расширение воздуха, обнаружил, что объем порции воздуха при атмосферном давлении линейно зависит от температуры, измеряемой в градусах Цельсия: график зависимости объема от температуры является прямой линией. При этом объемы воздуха при температурах 100 °С и 0 °С относятся примерно как 11:8.

1) Запишите формулу, выражающую плотность ρ воздуха при температуре t через плотность воздуха ρ_0 при 0 °С и температуру t (выраженную в градусах Цельсия).

2) Определите отношение плотности воздуха при температуре 10 °С к плотности воздуха при температуре 20 °С.

3) Считая плотность воздуха при 0 °С равной $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3, рассчитайте, как и на сколько изменится масса воздуха в помещении объемом 40 м^3 при уменьшении температуры от 20 до 10 °С.

С.Варламов

8 класс

1. Автомобилист торопится на встречу с мотоциклистом. Они заранее договорились, что встретятся ровно в полдень в определенном месте между 60-м и 80-м километрами автодороги, в начале (на нулевом километре) которой находится автомобилист. Известно, что железнодорожные пути на 70-м километре дороги можно пересекать только с 11:50 до 12:05, а в остальное время переезд закрыт. Автомобилист утверждает, что, начав движение в 11:00, он двигался по дороге с постоянной скоростью, был в назначенном месте встречи вовремя, но, не застав там мотоциклиста, не останавливаясь, продолжил движение с той же скоростью и доехал до своего дома, который находится на 100-м километре дороги. По словам автомобилиста, на железнодорожном переезде он тоже не останавливался. С какой скоростью мог двигаться автомобилист?

И.Маслов

2. В системе, изображенной на рисунке 7, все блоки невесомые, нити легкие и нерастяжимые, трения в осях блоков нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, горизонтальны. Массы M и m_0 двух брусков известны. Модуль максимальной силы трения между бруском массой M и площадкой, на которой он лежит, равен F.

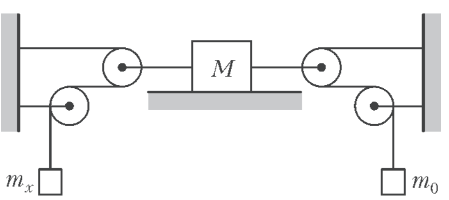


Рис. 7

1) Чему может быть равна масса m_x левого бруска для того, чтобы система находилась в равновесии?

2) Чему равно отношение модулей скоростей брусков массами M и m_x в случае нарушения равновесия системы?

Е.Мажник

3. Школьник Вася решил взвесить с помощью железных гирь найденный им недалеко от озера Чебаркуль небольшой кусок челябинского метеорита, используя симметричные равноплечие весы, сделанные из железа. В воздухе взвешивание дало результат $M = 2{,}1$ кг. Когда весы были полностью погружены в воду озера, результат был другим – для уравновешивания весов потребовалось положить на них гири, суммарная масса которых оказалась равной $m = 1{,}8$ кг. При этом и взвешиваемое вещество, и гири были полностью погружены в воду. Чему равна плотность материала метеорита? Плотность железа $\rho_ж = 7{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

С.Варламов

4. Цилиндрическая бочка с тонкими гладкими вертикальными металлическими стенками, в которую наливают воду для полива растений на даче, имеет радиус $R = 28{,}5$ см. Бочка установлена на подставках так, что между ее дном и землей имеется слой воздуха (рис.8). Осенью в бочке случайно оставили некоторое количество воды, и когда начались заморозки, вода стала медленно замерзать (бочка при этом не деформировалась). В итоге высота уровня льда в бочке оказалась равной $h = 70$ см. Потом наступила оттепель, воздух прогрелся, и лед нагрелся до температуры $t = 0$ °С одновременно со всех сторон (сверху, снизу и по боковой поверхности). Затем лед начал таять, и за время $T = 1$ ч растаяло $n = 2\%$ от всей массы льда. Чему будет равна высота уровня воды в бочке (считая от дна) через первый час таяния и чему – через второй час таяния? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

Рис. 8

М.Ромашка

9 класс

1. Школьница Варвара изучает равноускоренное движение бруска по наклонной плоскости вдоль оси x. С помощью специальных датчиков она исследует, в какие моменты времени t от начала движения передняя грань бруска проходит через точки с различными координатами x. Результаты измерений Варвара вносит в таблицу. Погрешность измерения координаты 0,1 см, точность показаний электронного секундомера 0,01 с. Брусок начинает двигаться без начальной скорости.

x, см	10	20	30	40
t, с	0,26	0,37	0,45	0,52

1) Каким может быть модуль ускорения бруска при движении по данной наклонной плоскости?

2) Какой результат можно получить при измерении координаты передней грани бруска в момент его остановки (из-за препятствия на наклонной плоскости), если секундомер в этот момент показал 0,69 с?

А.Фролов

2. Длинный однородный брусок с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами $a \neq b$ подвешен на двух вертикальных нитях, прикрепленных к одному из ребер, над сосудом, в который наливают воду. Когда в сосуд налили некоторое количество воды, два ребра бруска оказались точно на поверхности воды (вид сбоку, со стороны вышеупомянутого поперечного сечения, показан на рисунке 9). Найдите плотность материала, из которого сделан брусок. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

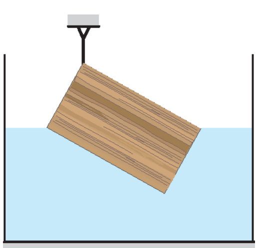


Рис. 9

Примечание. Центр масс однородного треугольника расположен на пересечении его медиан.

С.Варламов

3. По счастливой случайности отличнику Руслану и первой красавице Людмиле выпало вместе делать простейшую лабораторную работу по физике «Определение удельной теплоты плавления неизвестного вещества». Руслан включил печь, установив некоторую определенную мощность нагревания, поместил в капсулу кусочек исследуемого вещества и ровно в 10:00 по московскому времени начал измерения. Когда Руслан отошел к учителю, скучающая Людмила тайком переключила тумблер установки мощности печи в другое положение (которое, естественно, не запомнила) и более его не меняла. К великому удивлению Руслана, результат работы был совершенно неверным, и тогда, под угрозой двойки, Людмила созналась в содеянном. Учитель пожалел ребят и, сообщив им справочные данные, попросил определить: 1) установленную Людмилой мощность печи; 2) точное московское время переключения Людмилой тумблера установки мощности. Используя полученный Русланом при «помощи» Людмилы график зависимости температуры t вещества от времени τ (рис.10), помогите школьникам справиться с заданием учителя.

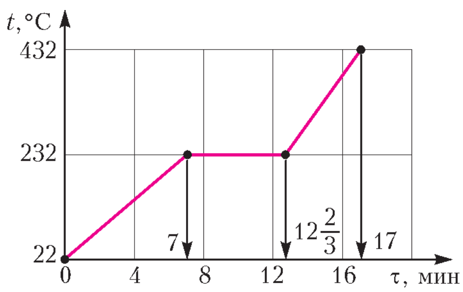


Рис. 10

Справочные данные. Удельная теплоемкость исследуемого вещества в жидком состоянии $c_ж = 260$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления этого вещества $\lambda = 60$ кДж/кг, масса кусочка вещества $m = 50$ г, мощность печи, первоначально установленная Русланом, $P_1 = 6$ Вт.

Е.Вишнякова

4. В «черном ящике» находится схема, состоящая из последовательно соединенных идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 3{,}3$ В и резистора сопротивлением $R_0 = 1500$ Ом (рис.11, слева). При попытке изготовить второй такой же «черный ящик» оказалось, что батареек с нужным

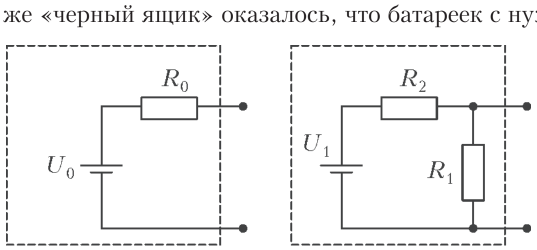


Рис. 11

напряжением 3,3 В в лаборатории больше нет, зато есть другая идеальная батарейка с напряжением $U_1 = 5$ В. По этой причине решили собрать схему, состоящую из имеющейся батарейки и двух резисторов, соединив эти элементы так, как изображено на рисунке 11 справа. Найдите, какими должны быть сопротивления резисторов R_1 и R_2 для того, чтобы два этих «черных ящика» оказались эквивалентными друг другу.

Д.Харабадзе

10 класс

1. Система, показанная на рисунке 12, состоит из трех блоков, трех одинаковых грузов, двух длинных нитей (первая нить показана на рисунке синей линией, вторая – красной) и короткой веревочки. К концу первой нити, перекинутой через средний и левый блоки, прикреплен первый груз массой m. К концу второй нити, перекинутой через правый и средний блоки, прикреплен второй груз массой m. Третий груз с такой же массой подвешен на веревочке к оси правого блока. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Все блоки и нити можно считать невесомыми, нити и веревочку нерастяжимыми, а силы трения пренебрежимо малыми. При вращении среднего блока первая и вторая нити не мешают друг другу. Найдите модули ускорений грузов.

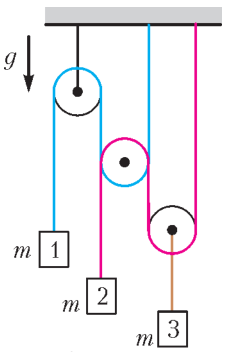


Рис. 12

А.Коваленко

2. Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось ее симметрии вертикальна (рис.13). На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой m, удерживая ее у одного из краев проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры L и H, указанные на рисунке, известны.

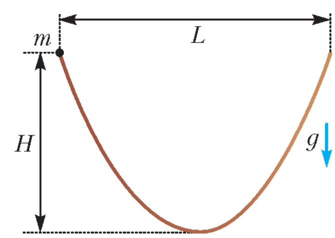


Рис. 13

А.Якута

3. Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе *1–2–3–1* тепловой машины, работающей в режиме теплового двигателя. В состоянии *1* газ имеет температуру T_1 и объем V_1. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое – политропические. Показатель политропы процесса *2–3* на единицу больше показателя политропы процесса *3–1* и на единицу меньше показателя политропы процесса *1–2*. В процессе *1–2* объем газа увеличивается в k раз. Один из процессов цикла – изотермический, причем в этом процессе объем газа изменяет свое значение в максимально широких пределах в этом цикле.

1) Определите объем и температуру газа в состоянии *3*.

2) Изобразите на pV – диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

Справка. Политропическим называется процесс, в течение которого теплоемкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину n называют показателем политропы.

Е.Вишнякова

4. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в участке $ACDEFB$ цепи, подключенном в точках A и B к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 5$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}04$ Ом (рис.14). Сопротивления резисторов указаны в омах, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.

Е.Мажник

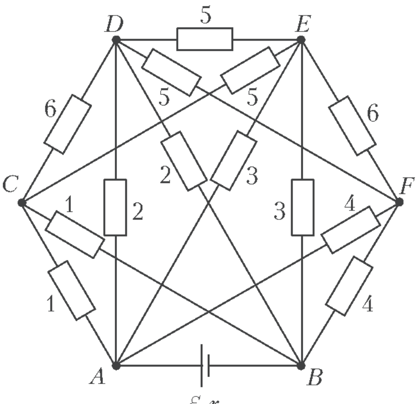


Рис. 14

5. Отличник Тимофей уравновесил тонкую однородную палочку, прикрепленную одним концом к шарниру, опустив другой ее конец в вертикальный сосуд с жидкостью (рис.15). При этом палочка находилась в равновесии, располагалась под углом α к вертикали и была погружена в жидкость на $(1/n)$-ю часть своей длины. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда S, длина палочки L, плотность ее материала ρ. Стенки сосуда и поверхность палочки посеребрены. В некоторой точке A над поверхностью жидкости на одной высоте с точкой крепления палочки экспериментатор Тимофей расположил выходное окно лазерной указки и направил от нее на стенку сосуда узкий световой луч, идущий параллельно палочке. Этот луч, распространяясь только в воздухе, отразился от стенки сосуда, затем отразился от палочки и вернулся обратно в точку A. Но тут «добрая» подруга Анфиса решила привлечь внимание Тимофея и приоткрыла кран, через который жидкость начала медленно выливаться из сосуда. Тимофей сначала рассердился, но быстро успокоился, так как понял, что через некоторое время луч все равно вернется в точку A – главное, вовремя закрыть кран! Какую массу жидкости следует вылить из сосуда для того, чтобы при неизменном угле падения света на стенку сосуда луч света, испущенный из точки A, распространяясь только в воздухе, опять вернулся в эту точку?

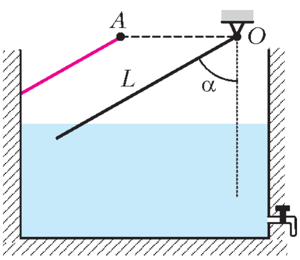


Рис. 15

Е.Вишнякова

11 класс

1. С наклонной плоскости без проскальзывания скатывается тонкостенная труба, наматывая на себя сверху легкую и тонкую веревку, которую можно считать нерастяжимой. Свободный конец веревки прикреплен к бруску, лежащему на плоскости выше трубы. Масса трубы M, масса бруска $M/2$. Ось трубы горизонтальна, свободный участок веревки параллелен наклонной плоскости и перпендикулярен оси трубы. Плоскость составляет с горизонтом угол $30°$. Ускорение, с которым поступательно движется брусок вслед за трубой, равно $0{,}3g$. Чему равен коэффициент трения между бруском и плоскостью?

С.Варламов

2. Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе *1–2–3–1* холодильной машины. В состоянии *1* газ имеет температуру T_1 и объем V_1. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое – политропические. Показатель политропы процесса *2–3* на единицу больше показателя политропы процесса *1–2* и на единицу меньше показателя политропы процесса *3–1*. В процессе *1–2* объем газа уменьшается в k раз. Один из процессов цикла – изотермический.

1) Определите объем газа в состоянии *3*.

2) Изобразите на pV – диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

3) Чему может быть равна температура газа в состоянии *3*?

Справка. Политропическим называется процесс, в течение которого теплоемкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину n называют показателем политропы.

Е.Вишнякова

3. Найдите электрическую емкость участка AB цепи, схема которого приведена на рисунке 16. Емкости конденсаторов указаны в микрофарадах, емкостью соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.

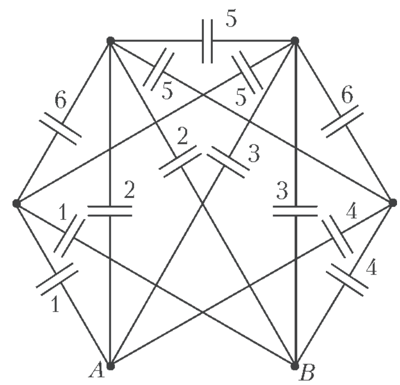


Рис. 16

Е.Мажник

4. Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (рис.17). Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жесткость каждой из пружин k, масса каждого из шарнирных блоков m, все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α. Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

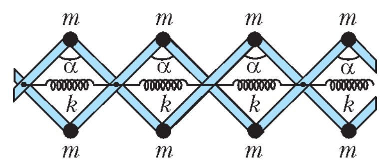


Рис. 17

М.Ромашка

5. Внутри прозрачного шестигранного корпуса шариковой ручки имеется круглый канал, заполненный чернилами. При рассматривании темного канала через прозрачный корпус было отмечено, что вращение корпуса вокруг его оси симметрии приводит к изменению видимой толщины канала с чернилами. Ширина видимой темной полосы максимальна, когда ближайшее ребро шестигранника, ось симметрии ручки и глаз наблюдателя лежат в одной плоскости. Отношение максимальной видимой толщины канала к его минимальной видимой толщине при неизменном расстоянии от ручки до глаза (которое во много раз больше толщины ручки) равно 2. Отношение диаметра d канала к длине L стороны шестигранника равно $\sqrt{3}/4$. Найдите показатель преломления материала, из которого сделан корпус.

С.Варламов

Публикацию подготовили

М.Семенов, $\boxed{\text{О.Шведов}}$*, А.Якута*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 3)

1. Серебряных рыбок на 2 больше.
Из первого условия получается, что золотых рыбок на 1 больше, чем треть от числа всех рыбок. Из второго условия получается, что красных рыбок на 4 меньше, чем треть. Поэтому серебряных рыбок на 3 больше, чем треть, т.е. на 2 больше, чем золотых.

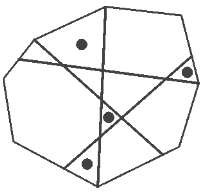


Рис. 1

2. Ответ показан на рисунке 1.

3. За 6 минут.
Отметим первого и второго фотографа на круге с помощью точек A и B (рис. 2), а точками C и D обозначим середины дуг, соединяющих точки A и B. Тогда CD – диаметр круга, и круг делится им на две половины: на дуге CAD Володя ближе к первому фотографу, а на дуге CBD – ко второму. По условию, ближе ко второму фотографу он был в течение 3 минут, т.е. ровно то время, пока он бежал по дуге CBD. Значит, весь круг он пробегает за 6 минут.

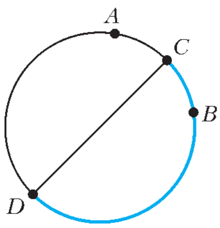


Рис. 2

4. 1) $31875 : 17 = 1875$; 2) $46172 : 17 = 2716$; 3) $83946 : 17 = 4938$.

5. Пусть A, B и C – углы треугольного пруда, а Крош живет в точке K на стороне AB, причем ближе к точке A (рис.3).

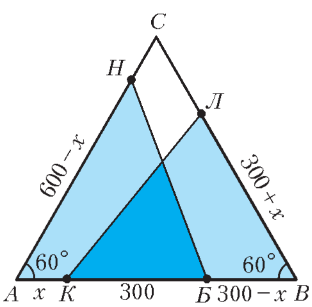


Рис. 3

Пусть $AK = x$. Тогда Бараш (живущий в точке $Б$) живет ближе к углу B, на расстоянии $БB = 600 - 300 - x = 300 - x$ от него. По условию $BЛ = 900 - BK = 300 + x$, где $Л$ – домик Лосяша (отметим, что так как 900 – половина периметра пруда, то неважно, каким из двух путей идти Лосяшу до Кроша), $AH = 900 - AБ = 600 - x$ (H – домик Нюши). Осталось заметить, что треугольники $AHБ$ и $BKЛ$ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому равны и их соответствующие стороны $ЛK$ и $БH$.

Замечание. То, что Нюша живет именно на стороне AC, видно из того, что $600 - x < 600$ (после того как Бараш прошел $300 + x$ до вершины A, ему осталось до Нюши еще $600 - x$). Аналогично, Лосяш живет именно на стороне BC.

С ЭТАЖА НА ЭТАЖ

Первая задача. Очевидно, номера квартир на одной лестничной площадке идут подряд. Определим, какие это могут быть номера. Рассмотрим следующие случаи.

1) Все номера – однозначные (7 штук). Тогда их общая стоимость не менее $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$ рублей, тогда как собрано с 7 квартир было бы только 21 рубль, чего явно не хватит.

2) Среди номеров имеются одно- и двузначные. Это может быть реализовано тремя способами.

2.1) 5 однозначных и 1 двузначный, т.е. это номера 5, 6, 7, 8, 9 и 10, общая стоимость которых $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 = 36$ рублей, тогда как собрано с 6 квартир было бы только 18 рублей, чего тоже не хватит.

2.2) 3 однозначных и 2 двузначных, т.е. это номера 7, 8, 9, 10 и 11, общая стоимость которых $7 + 8 + 9 + 1 + 1 + 1 = 27$ рублей, тогда как собрано с 5 квартир было бы только 15 рублей, чего тоже не хватит.

2.3) 1 однозначный и 3 двузначных, т.е. это номера 9, 10, 11 и 12, общая стоимость которых $9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 15$ рублей, тогда как собрано с 4 квартир было бы только 12 рублей, чего тоже не хватит.

3) Все номера двузначными быть не могут, так как общее число цифр нечетно.

4) Среди номеров имеются двух- и трехзначные. Это может быть реализовано лишь одним способом: 2 двузначных и 1 трехзначный, т.е. это номера 98, 99 и 100, общая стоимость которых $9 + 8 + 9 + 9 + 1 = 36$ рублей, тогда как собрано с 3 квартир было бы только 9 рублей, чего тоже не хватит.

5) Все номера трехзначными быть не могут, так как общее число цифр не делится на 3.

6) Среди номеров имеются трех- и четырехзначные. Это может быть реализовано лишь одним способом: 1 трехзначный и 1 четырехзначный, т.е. это номера 999 и 1000, общая стоимость которых $9 + 9 + 9 + 1 = 28$ рублей, тогда как собрано с 2 квартир было бы только 6 рублей, чего тоже не хватит.

7) Теоретически возможен еще один вариант: один любой семизначный номер, но таких номеров квартир не бывает.

Итак, все варианты рассмотрены и выяснилось, что в любом случае жильцам не должно было хватить собранных денег. Таким образом, условие выглядит противоречивым. Но здесь можно привлечь глобальный закон, помогающий во многих затруднительных случаях, который формулируется так: *никогда не забывай, где живешь*! Может, где-то за рубежом задача и впрямь представляется неразрешимой, но в данном случае речь идет о *наших* жильцах, которые при любых обстоятельствах готовы проявить чудеса изворотливости, лишь бы не переплатить. Не могли бы они где-нибудь сэкономить? Конечно, могли! Незачем заказывать цифру 9 (за 9 рублей), ведь можно заказать цифру 6 (за 6 рублей), а затем прикрепить ее на дверь в перевернутом виде. Это позволяет в рассмотренных выше вариантах 2.1, 2.2 и 2.3 уменьшить требуемую сумму на 3 рубля, а в вариантах 4 и 6 – даже на 9 рублей. При этом, однако, выясняется, что лишь в одном варианте жильцам хватило бы собранных денег: это вариант 2.3, в котором на площадку выходят квартиры с номерами 9, 10, 11 и 12, с жильцов которых было собрано всего 12 рублей, что как раз равняется сумме $6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2$. Итак, были заказаны цифры: 1 (4 шт.), а также 0, 2 и 6 (по 1 шт.).

Вторая задача. Пусть лифт остановился на n-м этаже. Тогда $(n-2)$ школьника спускаются пешком на свои этажи, и их суммарное неудовольствие равно $1+2+\ldots+(n-2)$, а $(18-n)$ школьников поднимаются, и их суммарное неудовольствие равно $2\times(1 + 2 + \ldots + (18 - n))$. Посмотрим, как изменится суммарное неудовольствие, если лифт остановится этажом выше. Спускающихся школьников станет на 1 больше, и суммарное неудовольствие возрастет на $(n-1)$. Но поднимающихся станет на 1 меньше, и суммарное неудовольствие снизится на $2(18-n)$. Итого, изменение суммарного неудовольствия при «перестановке» лифта на 1 этаж выше составит $(n-1)-2(18-n)=3n-37$.

Видно, что с ростом n эта величина при $n \le 12$ остается отрицательной, т.е. неудовольствие все время снижается, но уже при $n = 13$ (т.е. переходе с 13-го на 14-й этаж) снижение неудовольствия сменяется ростом. Значит, надо остановиться на 13-м этаже. При этом 11 школьников направляются вниз, 5 – вверх, и потому суммарное неудовольствие равно $(1+2+\ldots+11)+2\cdot(1+2+\ldots5)=96$. Сразу видно, что при подъеме лифта на 1 этаж выше эта величина, с одной стороны, увеличится на 12, а с другой – снизится на $2\cdot5=10$, т.е. в целом возрастет.

Мы получили ответ: школьникам надо выбрать 13-й этаж. Но он... *неверен*! И прежде чем разбираться, в чем загвоздка, давайте решим аналогичную задачу для N-этажных домов, где $N \le 17$, и найдем суммарное неудовольствие для каждого случая (зачем это надо – станет ясно позже). Рассуждая аналогично, находим, что изменение суммарного неудовольствия при «перестановке» лифта на 1 этаж выше составит $(n-1) - 2(N-n) = 3n - 2N - 1$. Оптимальным номером этажа является наименьшее значение n, при котором величина $3n - 2N - 1$ положительна (в крайнем случае, неотрицательна). После этого, зная n, найти суммарное неудовольствие – дело техники. Результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12
Сумм. неуд.	0	1	3	5	8	12	16	21	27	33	40	48	56	65	75	85

А теперь представьте себя на месте школьника, которому надо на 2-й этаж. Захочется ли вам подниматься вместе со всеми на 13-й этаж, а потом плестись вниз? Лифт, конечно, *способен* вместить всех, но обязательно ли им пользоваться? Школьникам, которые хотят подняться на несколько самых нижних этажей, имеет смысл сразу пойти пешком. Это наверняка позволит уменьшить суммарное неудовольствие.

А теперь уточним. Пусть по-прежнему лифт поднимается на n-й этаж, но при этом школьники, которым надо добраться на этажи не выше m-го, сразу идут пешком.

Пусть сначала $m = 2$. Тогда сразу пешком идет один школьник, получая неудовольствие, равное 2. Для остальных же 16-ти задача эквивалентна случаю 17-этажного дома, который мы уже рассмотрели (см. табл. 1). И потому наименьшее суммарное неудовольствие, которое могут испытать школьники, равно 2 + 85 = 87.

Пусть теперь $m = 3$. Тогда пешком сразу идут 2 школьника, получая суммарное неудовольствие, равное $2 \cdot (1+2) = 6$. Для остальных 15-ти задача эквивалентна случаю 16-этажного дома, который мы тоже рассмотрели (см. ту же табл. 1). И потому наименьшее суммарное неудовольствие, которое могут испытать школьники, равно 6 + 75 = 81.

Теперь ясно, как надо действовать дальше. Увеличивая m, находим суммарное неудовольствие «пешеходов» и добавляем к нему суммарное неудовольствие «ездоков» из таблицы. Затем выберем такое m, для которого эта сумма наименьшая. Результат опять же удобнее всего свести в таблицу2.

Как видим, если школьники, проживающие не выше пятого этажа, пойдут пешком, то суммарное неудовольствие при этом удается снизить с 96 до 76. Ну, а лифт при этом следует направить не на 13-й, а на 14-й этаж (это видно из первой таблицы, которая показывает, что оптимальное значение n на 4 меньше N).

Поэтому школьникам надо выбирать 14-й этаж.

Таблица 2

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Сумм. неуд. «пеш.»	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240	272
Сумм. неуд. «езд.»	85	75	65	56	48	40	33	27	21	16	12	8	5	3	1	0
Сумм. неуд. всего	87	81	77	76	78	82	89	99	111	126	144	164	187	213	241	272

XXI ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ ИМЕНИ А.П.САВИНА

1. 64 гнома.

Оценка. Больше поставить некуда. *Пример.* Раскрасим доску в шахматном порядке. На клетки одного цвета поставим рыцарей, на клетки другого цвета – лжецов.

2. Обязательно.

Пусть каждый день кормили комаров n школьников, тогда всего в летней школе было $10n$ участников. Количество школьников, кормивших комаров любые два дня подряд, больше чем $0{,}1n$, значит, всего кормивших комаров школьников меньше чем $n + 10 \cdot 0{,}9n = 10n$. Следовательно, хотя бы один участник комаров не кормил.

3. 2015.

Всего есть $45 \cdot 67 = 3015$ пар вида «черный шар и белый шар». Сумма чисел на белых шарах равна количеству таких пар «черный шар и белый шар», в которых черный шар лежит левее белого. Аналогично, сумма чисел на черных шарах равна количеству таких пар «черный шар и белый шар», в которых белый шар лежит левее черного. Значит, сумма чисел на белых шарах и сумма чисел на черных шарах вместе дают 3015, откуда получаем ответ: 3015 – 1000 = 2015.

4. Построим следующий ориентированный граф, соответствующий результатам турнира: вершины будут соответствовать командам и соединяться ребром $\overline{AB}$, если команда A забила по крайней мере один мяч команде B. Пусть в графе есть вершины A, B, C, D и ребра $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Тогда, если бы команда A забила команде B на один мяч меньше, команда C забила бы команде D на один мяч меньше, команда A забила бы команде D на 1 мяч больше, а команда C забила бы команде B на один мяч больше, то счет в матчах изменился бы, но суммарное количество забитых, а также суммарное количество пропущенных мячей каждой командой осталось бы неизменным, поэтому математик не смог бы определить счет в каждом матче. Несложно убедиться, что если таких четырех команд A, B, C, D не найдется, а всего команд, по крайней мере, четыре, то найдется команда, для которой все матчи, где она не принимала участие, нерезультативны. Это и будет искомая команда.

5. Одну.

Назовем тетраминошки квадратом, Г-образной, зигзагом, палочкой и Т-образной (в том порядке, в котором они приведены в условии).

Так как в каждой тетраминошке по 4 клетки, то количество клеток в получившемся прямоугольнике четно. Иными словами, по крайней мере одна сторона полученного прямоугольника имеет четную длину. Поэтому если применить шахматную раскраску, то черных и белых клеток получится поровну. Но во всех тетраминошках, кроме Т-образных, по две клетки каждого цвета, а в каждой Т-образной – три клетки одного цвета и одна клетка другого. Чтобы черных и белых клеток оказалось поровну, Т-тетраминошек с тремя черными клетками должно быть столько же, сколько с тремя белыми клетками, т.е. всего четное количество. Значит, Т-тетраминошки не использовались.

Применим теперь «матрасную» раскраску – покрасим в два цвета полосы шириной в клетку, параллельные четной стороне прямоугольника. Тогда длина полос будет четной, и клеток каждого цвета будет четное количество. В квадратах, зигзагах и палочках содержится четное число белых клеток, а в Г-образных тетраминошках – нечетное. Если Г-образные тетраминошки используются, то их используется нечетное количество, а значит, белых клеток в прямоугольнике нечетное количество. Получилось противоречие, значит,

Г-образные тетраминошки также не использовались.
Теперь будет применена крупная шахматная раскраска клетками 2×2. Некоторые клетки при этом могут оказаться обрезанными краями прямоугольника, но в этом нет беды. Важно, чтобы черных и белых клеток получилось поровну. Чтобы добиться этого, будем красить так, чтобы при осевой симметрии относительно серединного перпендикуляра к четной стороне прямоугольника каждая клетка прямоугольника меняла цвет. Теперь заметим, что квадрат и палочка содержат поровну клеток каждого цвета, а зигзаг – одну клетку одного цвета и три клетки другого цвета. Аналогично рассуждению для Т-образной тетраминошки доказывается, что зигзаг не может быть использован.
Докажем, наконец, что палочки и квадраты не могут быть использованы одновременно. Предположим противное. Тогда и палочек, и квадратов нечетное количество, так что всего тетраминошек четное количество. Значит, общее количество клеток кратно 8 и длина одной из сторон прямоугольника кратна 4. Применим диагональную раскраску в четыре цвета. Поскольку есть сторона длины, кратной 4, то клеток всех цветов поровну. Палочки занимают по одной клетке каждого цвета. Квадратики бывают четырех видов: i-й вид характеризуется тем, что занимает по две клетки цвета i и по клетке обоих цветов другой, нежели i, четности. Поскольку клеток 1-го и 3-го цветов поровну, а квадратики четного вида занимают поровну клеток 1-го и 3-го цветов, квадратиков нечетных видов поровну. Аналогично, квадратиков четных видов поровну. Значит, всего квадратиков четное количество, т.е. они не использовались. Противоречие.
6. Всегда.
При перемещении одного колышка у квадрата останется пара равных сторон, а диагональ при таком движении останется больше стороны квадрата, т.е. новый четырехугольник – выпуклый. Для сторон нового четырехугольника возможны три случая: 1) a, a, b, c; 2) a, a, b, b; 3) a, a, a, b. Сравнивая стороны между собой, мы можем их различить. В первом случае может быть передвинут только колышек между сторонами b и c. Во втором – колышек между равными сторонами. Определим, между какими. Если из вершины выходят меньшая сторона и меньшая диагональ или, наоборот, большая сторона и большая диагональ, то двигали ее.
Рассмотрим третий случай. Сравнивая диагонали, мы сможем определить, какой из углов между равными сторонами больше. Пусть это правый нижний угол (а равны левая, нижняя и правая стороны). Возможны два случая: он прямой, а левый нижний острый или он тупой, а левый нижний прямой. В первом случае двигалась левая верхняя вершина, а во втором – правая. Если $b < a$, то, поскольку правый нижний угол больше левого, новая точка будет внутри квадрата, значит, двигалась левая вершина. Если же $b > a$, то двигалась правая.
7. Если два треугольника не имеют общих точек, их можно отделить прямой, параллельной какой-то из сторон. Допустим противное. Выберем для каждого цвета пару непересекающихся треугольников и отделим их прямой, параллельной сторонам. Из четырех прямых какие-то две будут параллельны. Вне полосы между ними окажутся две полуплоскости, в них лежат непересекающиеся треугольники разного цвета.
8. Так как биссектрисы углов ABD и ACD проходят через середину M дуги AD, то достаточно доказать, что четырехугольник $BCNL$ вписанный (тогда M – радикальный центр трех окружностей, поскольку M – точка пересечения радикальных осей BL и CN, откуда третья радикальная ось PQ тоже проходит через M). Но это следует из того, что угол BLA равен полусумме дуг AB и MD, а значит, равен углу BCN.
9. Угол между прямыми XY и AB равен полуразности дуг BX и AY, т.е. равен полуразности углов CAB и CBA. С другой стороны, CI как биссектриса треугольника ABC образует такой же угол с высотой, откуда и следует утверждение задачи.

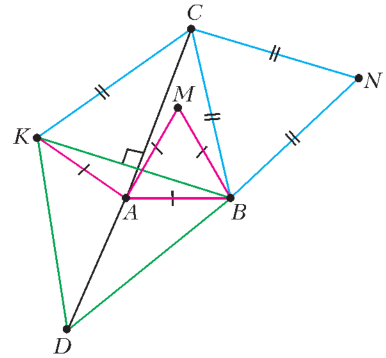


Рис. 4

10. На отрезке BK как на стороне построим равносторонний треугольник BDK (рис.4). Из условия задачи следует, что $\Delta ABC = \Delta AKC$, поэтому точки B и K симметричны относительно прямой AC. Значит, точка D лежит на их оси симметрии. Рассмотрим поворот вокруг точки B на $60°$ по часовой стрелке: образами точек D, A и C являются точки K, M и N соответственно. Тогда так как D лежит на прямой AC, то K лежит на прямой MN.
11. Пусть O и R – центр и радиус окружности, описанной около $ABCD$, M – середина AC, M_1 и M_2 – точки пересечения медиан треугольников ABC и ACD соответственно, а O_1 и O_2 – центры упомянутых в условии окружностей, т.е. окружностей девяти точек треугольников ABC и ACD (рис.5).

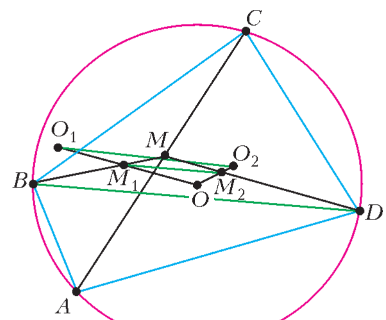


Рис. 5

Так как окружность с центром O является описанной для треугольников ABC и ACD, то окружности с центрами O_1 и O_2 являются ее образами при гомотетиях с центрами M_1 и M_2 соответственно и коэффициентами $k = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $OM_1 = 2O_1M_1$ и $OM_2 = 2O_2M_2$. Тогда из подобия треугольников O_1OO_2 и M_1OM_2 получим, что $O_1O_2 = \frac{3}{2}M_1M_2$. Кроме того, из свойства точки пересечения медиан треугольника следует, что $M_1M_2 = \frac{1}{3}BD$. Таким образом, $O_1O_2 = \frac{1}{2}BD$. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются тогда и только тогда, когда O_1O_2 является суммой их радиусов. Каждый из этих радиусов равен $\frac{1}{2}R$, поэтому это, в свою очередь, равносильно тому, что $O_1O_2 = R$ или $BD = 2R$. Так как $2R$ – длина диаметра окружности, то это равносильно тому, что угол DAB – прямой.
12. 25.
Так как в результате продаж количество предприятий у каждого министра осталось прежним, то «из рук в руки» переходило одно и то же их количество. Обозначим его через x, тогда у первого изначально было $10(x-1)$ предприятий, у второго было $10(x-2)-x$, у третьего $10(x-3)-x$ и так далее, т.е. у шестого было $10(x-6)-x$. Следовательно, $x > 6$.
С другой стороны, всего было приватизировано

$$10(x-1)+10(x-2)-x+10(x-3)-x+10(x-4)-$$
$$-x+10(x-5)-x+10(x-6)-x=55x-210$$

предприятий. По условию, $55x - 210 < 200$, т.е. $x < 8$. Следовательно, единственно возможное значение x это 7, тогда у государства осталось 25 предприятий.
Проверим, что при $x = 7$ условие задачи действительно выполняется. В этом случае у первого было 60 предприятий, у второго – 43, у третьего – 33, у четвертого – 23, у пятого –

13, у шестого – 3. После серии последовательных продаж семи предприятий эти количества действительно не изменяются.

13. 1.

Из условия задачи следует, что $a_n = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1 \geq a_{n+1}$, так как $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - 1)^2 \geq 0$. Значит, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ $\ldots \geq a_{2015}$. Так как $a_1 = a_{2015}$, то это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда вместо знаков неравенства везде стоят знаки равенства, поэтому при любом натуральном n выполняется равенство $(a_{n+1} - 1)^2 = 0$. Следовательно, данная последовательность – постоянная и каждый ее член равен 1.

14. Да.

Пусть $f(x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2015}$. Тогда $f\left(\frac{n-2015}{n}\right) = \frac{n^2 - 2015}{n^2}$.

15. Нельзя.

Пусть удалось расставить числа так, как требуется в условии. Для каждой клетки квадрата 7×7 подсчитаем количество квадратов 3×3, в которых она входит. В силу симметрии, это достаточно сделать для углового квадрата 4×4 (рис. 6). Заметим, что количество квадратов 5×5, в которые входит каждая клетка, точно такое же. Значит, сумма чисел, записанных во всех квадратах 3×3, равна сумме чисел, записанных во всех квадратах 5×5. Но первая сумма положительна, а вторая – отрицательна. Противоречие.

1	2	3	3			
2	4	6	6			
3	6	9	9			
3	6	9	9			

Рис. 6

Замечание. Убедиться, что каждая клетка входит одинаковое количество раз как в квадраты 3×3, так и в квадраты 5×5, можно иначе, подсчитав общие количества квадратов каждого вида. Действительно, количество квадратов первого вида равно $25 = 5 \times 5$, а количество квадратов второго вида равно $9 = 3 \times 3$.

16. Не может.

Из условия задачи следует, что $c - b = b - a = d$ – натуральное число. Рассмотрим разложения чисел a и b на простые множители. Так как $b > a$, то найдется хотя бы один простой множитель p, который входит в разложение числа b с большим показателем степени n, чем он входит в разложение числа a. Тогда d не делится на p^n, значит, и c не делится на p^n. Таким образом, НОК$(a; b)$ делится на p^n, а НОК$(a; c)$ не делится на p^n. Следовательно, их равенство выполняться не может.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Для наблюдателя под водой.

2. Показатель преломления жидкости меняется с глубиной, причем у дна, где самая высокая концентрация сахара, он максимален. Наклон луча увеличивается по мере того, как он входит в оптически более плотные слои жидкости. При отражении от дна все происходит в обратном порядке.

3. Лучи света, испытывающие полное внутреннее отражение на границе «вода–воздух», делают воронку блестящей, мешая разглядеть тело внутри нее. При заполнении воронки водой этот эффект исчезает, и отраженные от тела лучи, практически не испытывая преломления на стенках воронки, доходят до глаза.

4. См. рис.7.

5. Для случая, когда предмет находится от пластинки на расстоянии не больше ее толщины, ход двух лучей показан на рисунке 8. В ином случае построение не выполнимо.

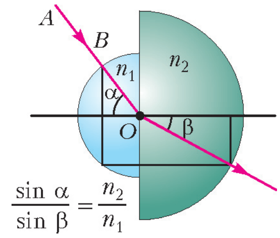


Рис. 7

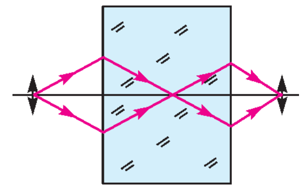


Рис. 8

6. Углы при основании призмы равны $72°$, а угол при вершине равен $36°$.

7. Необходимо рассмотреть два случая: линза собирающая (см. рис.9,*а*) и линза рассеивающая (см. рис.9,*б*).

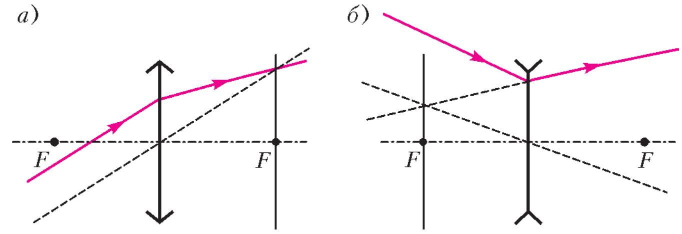


Рис. 9

8. См. рис.10.

9. Построение показано на рисунке 11 (луч AB после преломления пойдет по направлению BC).

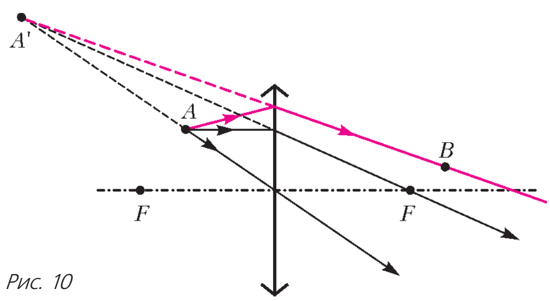


Рис. 10

10. Экран следует поместить вдоль прямой $A'B'$ наклонно к оси линзы (рис.12).

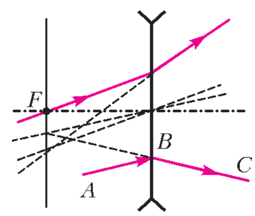


Рис. 11

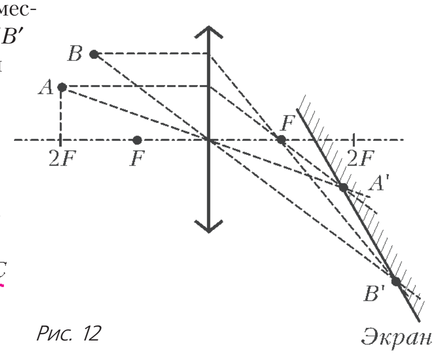


Рис. 12

11. Изображением квадрата является трапеция $A'B'C'D'$ (рис.13).

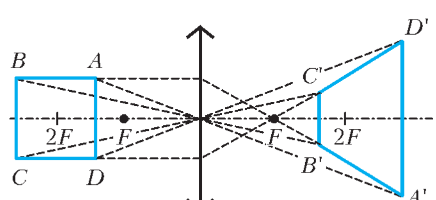


Рис. 13

12. Каждая половинка линзы дает свое изображение точки S – симметричные точки S_1 и S_2 (рис.14).

13. Построение представлено на рисунке 15. Здесь AB – изображение предмета в отсутствие дополнительной линзы, $A'B'$ – в ее присутствии. Фокусное расстояние линзы долж-

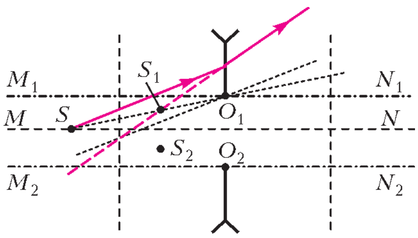


Рис. 14

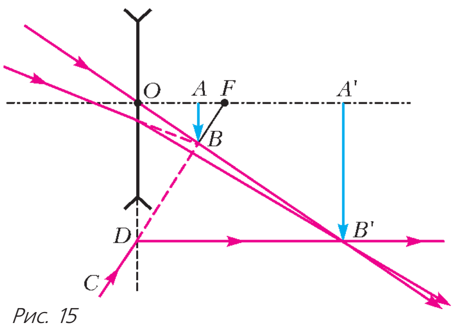


Рис. 15

но быть таким, чтобы расстояние OA было втрое меньше, чем OA'. Фокус линзы можно найти с помощью продолжения луча CD, идущего после преломления в линзе параллельно главной оптической оси.

Микроопыт

Для объяснения постройте изображение карандаша, учитывая преломление лучей света на границе «вода–воздух».

СИМЕДИАНА

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6. *Указание.* Докажите, что A – точка пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника BKC и используйте основную задачу (факт 6).

7. *Указание.* Проведите симедиану и докажите, что точка C_1 совпадает с точкой X из факта 4.

8. *Указание.* Искомые точки – точки пересечения прямой AA' с окружностью. Используйте теорему о симметричной бабочке.

9. *Указание.* Используя второе определение симедианы, докажите, что точка D лежит на окружности Аполлония точек A и C, содержащей точку B. Далее используйте результат упражнения 12 и факт 5.

10. *Указание. Первый способ.* Точки D_1, D_2 и D_3 лежат на одной прямой по теореме о прямой Симсона. Используя следствие из теоремы синусов, получите равенства $\frac{D_3D_2}{\sin\angle CBA} = BD$ и $\frac{D_1D_2}{\sin\angle CAB} = AD$. Далее используйте, что четырехугольник $ACBD$ – гармонический (факт 5) и теорему синусов для треугольника ABC.

Второй способ. Используя факт 7 и, например, упражнение 10, докажите, что треугольники BDD_3, ADD_1 и MDD_2, где M – середина AB, подобны (эквивалентное утверждение содержится в комментарии 2 к факту 7). Далее используйте поворотную гомотетию с центром в точке D, переводящую A в D_1.

11. *Указание.* Используйте, что четырехугольник $PXCY$ – вписанный, определение симедианы и основную задачу (факт 6).

12. *Указание.* Используя теорему о симметричной бабочке или факты 7 и 6, докажите, что данные прямые проходят через точки X, Y и Z пересечения касательных к окружности, проведенных в точках A, B и C, и симметричны симедианам треугольника ABC относительно биссектрис треугольника XYZ. Осталось воспользоваться тем, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (точка Лемуана).

13. *Указание.* Докажите, что $A'C'$ является общей касательной к данным окружностям, а прямая MH делит отрезок $A'C'$ пополам. Далее используйте, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника $BA'C'$, и факт 7.

14. *Указание.* Докажите, что прямая AB содержит медиану треугольника ACD. Далее рассмотрите точку B' – образ точки B при преобразовании подобия, переводящем треугольник ACD в треугольник PKL, и докажите, что B и B' изогонально сопряжены относительно треугольника PKL.

Комментарий. Эта задача является обобщением предыдущей.

15. *Указание.* Используя определение симедианы и факт 7, докажите, что четырехугольник $AMDX$ – вписанный.

16. *Указание.* $MN = \frac{1}{2}AB$. Используя основную задачу и факт 1, покажите, что прямая WX содержит симедиану треугольника AWC и, соответственно, медиану треугольника TWA. Аналогично – с прямой WY.

17. $45°$.

Указание. Используя факт 1, докажите, что CM – симедиана треугольника ABC. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Используйте основную задачу и подобие треугольников.

Второй способ. Рассмотрите точку H', симметричную H относительно середины AB, докажите, что CM – симедиана в треугольнике $H'CH$, и используйте второе определение симедианы.

ИСТОЧНИК В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. $I_{кз} = 29{,}6$ А. **2.** $k = 3$. **3.** $n = 5$.
4. $P_{max} = 8$ Вт. **5.** $U = 220$ В.

XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Можно.
Покрасим верхнюю грань в первый цвет, нижнюю – во второй, а остальные четыре – в третий.

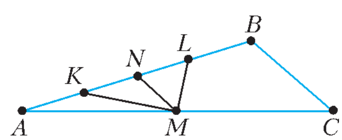


Рис. 16

2. Пусть N – середина AB (и одновременно – середина KL) (рис. 16). Длина средней линии MN равна $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}KL$. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром KL.

3. Могли.

$$2^9 + \ldots + 2^{18} = 2^9\left(2^{10} - 1\right) =$$
$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + \left(2^{10} - 1\right).$$

Замечание. Это – единственный пример.

4. На 15 квадратов.
Очевидно, крайние левые клетки двух разных строк не могут принадлежать одному квадрату. Значит, квадратов не меньше 15. Пример с 15 квадратами приведен на рисунке 17.

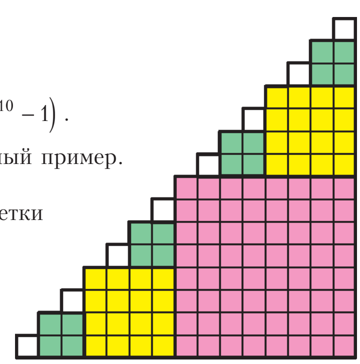


Рис. 17

10–11 классы

1. Могли.
$2^{99}+\ldots+2^{198}=2^{99}\left(2^{100}-1\right)=1+2+3+\ldots+\left(2^{100}-1\right)$.

Замечание. Это – единственный пример.

2. Можно.
На ковре можно разместить пять непересекающихся квадратов со стороной 1 м (рис. 18; сторона пунктирного квадрата равна $0,75\sqrt{2}>1$). Хотя бы один из них останется без дырки.

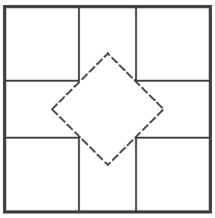


Рис. 18

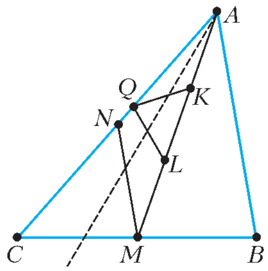


Рис. 19

4. Пусть N – середина AC (рис. 19).

Первое решение. Рассмотрим на стороне AC такую точку Q, что $\angle ALQ = \angle C$. Тогда треугольники ALQ и ACM подобны (по двум углам). При этом подобии медиана MN треугольника ACM переходит в медиану QK треугольника ALQ. Следовательно, треугольник KQL подобен треугольнику NMC, а значит, и треугольнику ABC. Таким образом, точки P и Q совпадают.

Второе решение. Рассмотрим композицию симметрии относительно биссектрисы угла CAM, переводящей C в точку C', и гомотетии с центром A, переводящей C' в L. При этом точка N перейдет в K, а образ точки M попадет на прямую AC и, поскольку треугольники NMC и KPL подобны, совпадет с P.

5. $N=3\cdot 2^{1009}$.

Оценка. Два нечетных числа не могут стоять рядом, так как они не делятся на свою четную разность. Поэтому четных чисел не меньше половины, т.е. хотя бы 1008. Так как их больше половины, то какие-то два четных числа стоят рядом. Из этой пары четных чисел хотя бы одно кратно 4, иначе их разность кратна 4, а сами они – нет.

Предположим, у нас нет чисел, кратных 3. Тогда, из-за нечетности количества чисел, какие-то два соседних числа дают одинаковые остатки при делении на 3. Эти числа делятся на свою разность, которая кратна 3. Противоречие.
Следовательно, $N\ge 3\cdot 2^{1009}$.

Пример. Числа 4, 3, 2, 1, 2, 1, …, 2, 1, 2 удовлетворяют условию. Их произведение равно $3\cdot 2^{1009}$.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Пусть X, Y и Z – середины DE, BC и AE соответственно (рис. 20). Так как ZX – средняя линия треугольника AED, то $CXZY$ – параллелограмм. CX – медиана, а значит, и высота равнобедренного треугольника DCE, следовательно, $ED\perp CX\parallel YZ$.

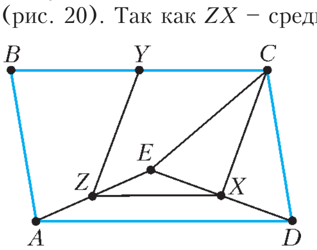


Рис. 20

2. Один столб.
Прямая ЛЭП пересекается с территорией базы по нескольким отрезкам. Шпион считает столбы, когда оказывается в конце одного из этих отрезков. Рассмотрим один из – AB. Когда шпион находится в точке A, он считает столбы по одну сторону от AB, а когда находится в точке B, считает столбы по другую сторону от AB. Если к этим столбам добавить столбы внутри AB, то получится 36 столбов. Складывая эти равенства для всех отрезков, получим, что 2015 плюс количество n столбов внутри базы делится на 36. Так как $n\le 36$ и 2016 делится на 36, то $n = 1$.

3. а) Не обязательно.
Числа 99, $99^2=9801$, $99^3=970299$ начинаются с девятки.
б) Не обязательно.
Очевидно, найдется такое натуральное k, что $10^{-k}\le 1-\sqrt[2015]{0,9}$. Тогда неравенство

$$0,9\le\left(1-10^{-k}\right)^{2015}\le\left(1-10^{-k}\right)^{n}<1$$

выполнено при всех $n\le 2015$. Умножая на 10^{kn}, получим $0,9\cdot 10^{kn}\le\left(10^{k}-1\right)^{n}$. Это значит, что при $x=10^{k}-1$ все числа вида x^n, где n = 1, 2, …, 2015, начинаются с девятки.

Замечание. Годится уже k = 5, так как по *неравенству Бернулли* $0,9\le 1-n\cdot 10^{-5}\le\left(1-10^{-5}\right)^{n}$ даже для $n\le 10000$.

4. Может.
Примеры приведены на рисунках 21 и 22.

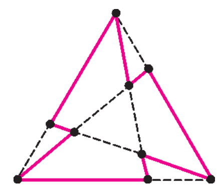


Рис. 21

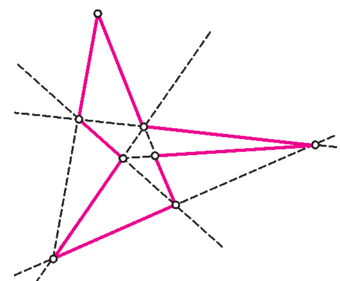


Рис. 22

Замечание. Можно доказать, что число вершин такого многоугольника не может быть меньше восьми.

6. Пусть каждая сторона $A_iA_{i+1}=a$ многоугольника $A_1\ldots A_N$ продолжена синим отрезком $A_iB_i=b_i$ и красным отрезком $A_{i+1}C_i=c_i$ (считаем, что $A_{N+1}=A_1$). Хорды B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке A_2, значит, $c_1\left(a+b_1\right)=b_2\left(a+c_2\right)$, т.е. $\left(c_1-b_2\right)a=b_2c_2-b_1c_1$. Аналогично, $\left(c_2-b_3\right)a=b_3c_3-b_2c_2$ и т.д. Сложив все эти равенства, получим
$\left(c_1+\ldots+c_N-b_1-\ldots-b_N\right)a=0$, т.е. $c_1+\ldots+c_N=b_1+\ldots+b_N$.

7. См. решение задачи М2395 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

5. Существуют.

Первое решение. Назовем *хорошим* многочлен, у которого все коэффициенты равны 0 или 1. Заметим, что произведение хорошего многочлена степени n на многочлен x^m+1, где $m>n$, снова является хорошим многочленом. Начав с многочлена $x+1$ и домножив его таким образом на 2019 многочленов вида x^m+1 с нечетным m, мы получим хороший многочлен $f(x)$, делящийся на многочлен $(x+1)^{2020}$. Тогда

$$f(x)=\left(x^{2020}+2020x^{2019}+\ldots+1\right)\left(x^{k}+ax^{k-1}+\ldots+1\right).$$

Второй коэффициент многочлена $f(x)$ равен $2020+a$, и он не больше 1, поэтому $a\le -2019$.

Второе решение. Рассмотрим многочлен 18-й степени

$$h(x)=(x+1)^{4}\left(x^{2}+x+1\right)\left(x^{4}+\ldots+1\right)\left(x^{8}+\ldots+1\right)$$

и многочлен $g(x)=h(x)\left(x^{18}+\ldots+1\right)$. Легко видеть, что коэффициент при x^{18} многочлена $g(x)$ равен сумме коэффициентов многочлена $h(x)$, т.е. $h(1)=2^{4}\cdot 3\cdot 5\cdot 9=2160>2015$. Произведение $g(x)g(-x)=\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{10}\right)\left(1-x^{18}\right)\left(1-x^{38}\right)$ по тем же соображениям, что и в первом решении, будет иметь коэффициенты, по модулю не превышающие единицы.

Замечание. Второе решение дает всего лишь 36-ю степень множителей, в то время как в первом решении степень одного множителя равна 2020, а второго – гораздо больше.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

2. Выберем на лучах AC и AB точки D' и E' соответственно так, что $D'B \parallel DY$ и $D'E' \parallel DE$ (рис. 23). Тогда $D'B \perp BX$, так что BD' – внешняя биссектриса в треугольнике ABC, т.е.

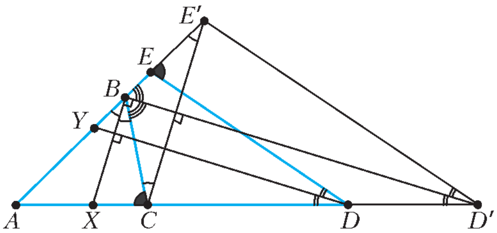


Рис. 23

$\angle CBD' = \angle D'BE'$. Поскольку треугольники ADE и $AD'E'$ гомотетичны, прямая $D'B$ является биссектрисой последнего, так что $\angle BD'C = \angle BD'E'$. Значит, треугольники BCD' и $BE'D'$ симметричны относительно BD', откуда $CE' \perp BD'$, и поэтому $BX \parallel CE'$. Значит, $\dfrac{AX}{AC} = \dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AY}{AE}$ (последнее равенство следует из гомотетичности ADE и $AD'E'$, так как Y и E – основания соответствующих биссектрис), откуда и следует требуемое.

3. $n + 1$.

Занумеруем фирмы в порядке возрастания капиталов. Пусть фирма A из условия задачи получила номер $m < n + 1$. Так как она сохранилась на первом шаге, то к ней присоединилась некоторая фирма B с номером $k < m$. Было еще не больше $m-2$ пар, в которые вошли фирмы с номерами меньше m. В остальных парах обе фирмы были больше, чем A и B, поэтому у оставшихся фирм капитал получился больше, чем у A. Занумеруем фирмы снова, в порядке возрастания образовавшихся капиталов. Тогда фирма A получит номер не больше $m - 1$. Аналогично, на каждом следующем шаге ее номер убывает. Так как всего шагов $n \ge m$, то не позже чем на предпоследнем шаге A получит номер 1 и присоединится к другой фирме – противоречие.

Теперь построим один из возможных примеров, когда $(n + 1)$-я фирма, обозначим ее F, присоединяет все остальные. Представим себе, что после каждого шага объединения общая площадь уменьшается в два раза. Это значит, что большей из двух фирм достается не сумма, а среднее арифметическое площадей. Ясно, что на каждом шаге будут оставаться те же фирмы, что и при исходной процедуре. Теперь отметим на числовой прямой положительное число f и будем считать, что это площадь фирмы F по окончании процесса. Отметим два числа g и h, симметричные относительно f. Можно считать, что это площади, занятые фирмой F и другой фирмой G перед последним объединением. Каждая из них есть среднее арифметическое площадей двух фирм перед предыдущим шагом. В качестве этих площадей выберем два числа, симметричных относительно g, и два, симметричных относительно h. Одно из них – площадь f' фирмы F перед предпоследним шагом. Можно выбрать эти числа так, что два из них меньше f', а одно – больше. Повторим этот шаг, выбрав 8 чисел в качестве площадей фирм, существовавших перед предыдущим шагом. Можно выбрать их так, что площади трех фирм будут меньше площади фирмы F, а остальные – больше. Продолжая аналогично, получим в качестве исходных площадей фирм 2^n чисел, из которых только n меньше, чем исходная площадь фирмы F. Если все упомянутые числа выбирать достаточно близко друг от друга, то все они оказываются положительными, и мы получаем искомый пример.

5. Пусть радиусы шаров равны 1; рассмотрим куб, гомотетичный коробке с центром в ее центре, грани которого отстоят от граней коробки на 1. Тогда центры трех шаров лежат в нем, а попарные расстояния между ними не меньше 2. Если при этом ребро нового куба не короче, чем $\sqrt{2}$, то можно раскрасить его вершины в шахматном порядке и взять 4 шара с центрами в 4 черных вершинах. Они обладают всеми необходимыми свойствами.

Осталось показать, что в кубе с ребром, меньшим $\sqrt{2}$, нельзя выбрать три точки с попарными расстояниями хотя бы 2.

Пусть такие три точки нашлись. Спроецируем эти точки на ось, параллельную ребру куба; максимальное расстояние между проекциями меньше $\sqrt{2}$ (т.е. его квадрат меньше 2), а сумма двух других расстояний равна максимальному (и тогда сумма квадратов этих расстояний также меньше 2). Проделав такие рассуждения для всех трех осей и применяя теорему Пифагора, получаем, что сумма квадратов попарных расстояний между точками меньше 12, т.е. один из этих квадратов меньше 4. Противоречие.

6. Пусть в первом дворце a секций, а во втором – b секций. Пусть общее количество задействованных школьников равно s, и i-й школьник участвует в d_i секций первого дворца (и d_i секций второго). Тогда есть d_i^2 пар секций из разных дворцов таких, что i-й школьник ходит в обе секции пары. Поскольку в каждой из ab пар секций из разных дворцов не более одного общего школьника, получаем

$$ab \ge \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \ge \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2.$$

Просуммируем теперь количества школьников во всех секциях первого дворца, а также количества школьников во всех секциях второго дворца; в обоих случаях получится $\sum\limits_{i=1}^{s} d_i$.

С другой стороны, в первом случае получается не меньше чем an, а во втором – не меньше чем bk. Значит,

$$ab \ge \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)^2 \ge \frac{an \cdot bk}{s}.$$

Сокращая на ab, получаем $s \ge nk$, что и требовалось.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXVIII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. 3×10 или 4×6 клеточек.

Очевидно, что ширина картины больше одной клеточки. Нарисуем внутри картины еще одну рамку шириной в одну клеточку (рис.24). Тогда в маленькой рамке, как и в большой, будет 4 угловые клеточки (красные), а каждая сторона будет на две клеточки короче. Значит, в маленькой рамке будет на 8 клеточек меньше, чем в большой (они окрашены синим). Значит, из 8 клеточек должен составиться прямоугольник внутри маленькой рамки, т.е. он может иметь размеры 1×8 или 2×4. Отсюда и получается ответ.

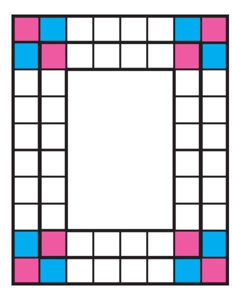


Рис. 24

2. а) Например, так: $\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$, $\boxed{3}+\boxed{2}=\boxed{5}$, $\boxed{3}-\boxed{2}=\boxed{0}$, $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{5}=\boxed{2015}$.

б) $\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$, $\boxed{3}\cdot\boxed{2}\boxed{1}=\boxed{63}$, $(\boxed{63}+\boxed{2})\cdot\boxed{3}\boxed{1}=\boxed{2015}$.

3. Да.

Задав вопросы про 6 клеток, отмеченных точками на рисунке 25 слева, Вася сможет узнать сумму всех чисел, кроме L и R. Вычитая эту сумму из 500, он найдет $L + R$. Аналогично он найдет $U + D$. Остается спросить сумму чисел в центральном кресте и вычесть из нее $(L+R)+(U+D)$.

4. Например, в начале месяца курс мог равняться 49,50, а в

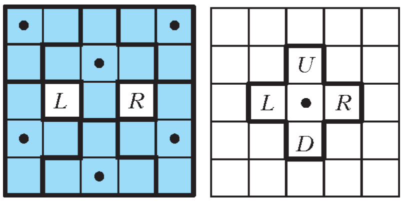


Рис. 25

конце месяца – 59,40 рублей за доллар.

5. Нет, не могут.

Допустим, что восемь почти квадратов могут идти подряд. Заметим, что среди этих восьми последовательных натуральных чисел найдутся числа, дающие остатки 2 и 6 при делении на 8. Они делятся на 2, но не делятся на 4, поэтому они обязаны иметь вид $2m^2$ и $2n^2$. Но тогда $2m^2 - 2n^2 = 4 \Rightarrow m^2 - n^2 = 2$, что невозможно. Противоречие.

6. $67{,}5°$.

Прямая A_1A является биссектрисой угла $B_1A_1C_1$ (рис.26), так как высота треугольника является биссектрисой его ортотреугольника. Теперь докажем, что угол $B_1A_1C_1$ прямой. Действительно, легко заметить, что $\angle B_1A_1C = \angle A$ (это следу-

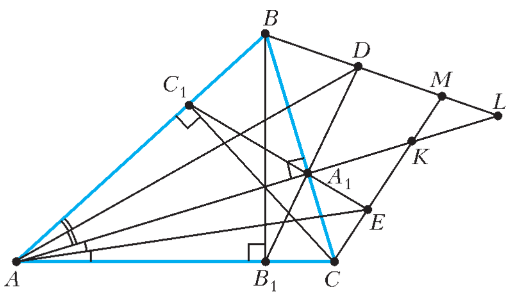


Рис. 26

ет из подобия треугольников A_1B_1C и ABC), аналогично, $\angle C_1A_1B = \angle A$. Таким образом, $\angle B_1A_1C_1 = 90°$, а значит, $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1 = 45°$.

Пусть K и L – точки пересечения прямой AA_1 с прямыми CE и BD соответственно. Из вышесказанного следует, что $\angle KA_1E = \angle EA_1C = \angle BA_1D = \angle DA_1L = 45°$ (как вертикальные для $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$). Следовательно, A_1E и A_1D являются биссектрисами углов KA_1C и BA_1L соответственно. Таким образом, точка D равноудалена от прямых AA_1 и A_1B, а точка E – от прямых AA_1 и A_1C. Но точка D по условию задачи лежит на биссектрисе угла BAA_1, поэтому она равноудалена от прямых AA_1 и AB. Значит, D – центр вневписанной окружности треугольника BAA_1. Поэтому BD – биссектриса внешнего угла к углу ABC. Аналогично, E – центр вневписанной окружности к треугольнику CAA_1, а CE – биссектриса внешнего угла к углу ACB.

Пусть M – точка пересечения прямой CE с прямой BD, тогда по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle BMC = \\ = 180° - \frac{(180° - \angle C)}{2} - \frac{(180° - \angle B)}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{135°}{2} = 67{,}5°.$$

7. Число k четное.

Заметим, что два четных числа не могут стоять подряд, так как тогда следующее за ними число было бы также четным, а из этого вытекает, что и все числа на круге оказались бы четными. Поскольку четных чисел ровно половина, они чередуются с нечетными, поэтому k – четное.

Замечание. По условию пример такой расстановки приводить не требуется, однако нетрудно убедиться, что расстановка чисел 1, …, 1000 по порядку по кругу подходит.

8. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

На рисунке 27 слева цветными квадратами показано расположение кусков Карлсона, при котором Малыш точно не сможет получить квадрат со стороной больше $\frac{1}{3}$. Осталось показать, что Малыш всегда сможет получить кусок такого размера. Справа на рисунке 27 изображены пять кусочков размером $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ таких, что каждый из кусков Карлсона заденет не

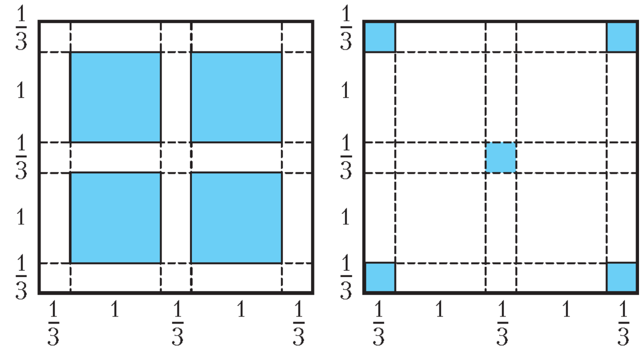


Рис. 27

более одного из них. Поэтому Малыш сможет взять себе один из этих кусочков.

9. $90°$.

Обозначим центры двух равных окружностей, упомянутых в условии, соответственно I_B и I_C (рис.28). Заметим, что $I_BI_C \parallel BC$, так как расстояния от точек I_B и I_C до прямой

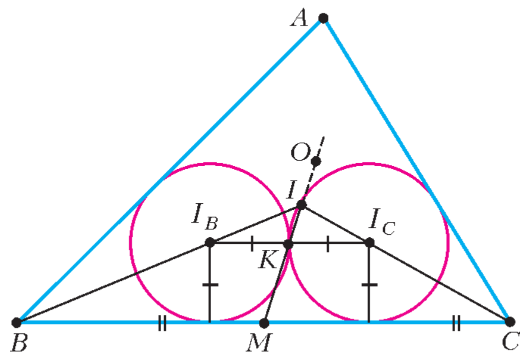


Рис. 28

BC равны. Следовательно, $\angle II_BI_C = \angle IBC$ и $\angle II_CI_B = \angle ICB$, т.е. треугольники I_BII_C и BIC подобны. Если теперь мы продолжим медиану IK треугольника I_BII_C до пересечения с BC в точке M, то IM, из подобия, будем медианой уже в треугольнике BIC. Но, согласно условию, это все та же прямая OI, т.е. точки M, O, и I лежат на одной прямой. Значит, либо прямая OM – серединный перпендикуляр к стороне BC, либо точки M и O совпадают.

В первом случае получается, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на серединном перпендикуляре к его стороне, из чего следует, что этот треугольник равнобедренный, а это противоречит условию.

Во втором случае получаем, что угол A прямой, так как опирается на диаметр BC описанной окружности треугольника ABC.

10. Рассмотрим разность двух соседних членов последовательности: $a_{n+1} - a_n = 1 + a_1a_2 \dots a_n - a_n$. Тогда, преобразуя, получаем

$$a_{n+1} - a_n = 1 - a_n + (a_1a_2 \dots a_{n-1})a_n = 1 - a_n + (a_n - 1)a_n = \\ = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2.$$

11. Рассмотрим какую-нибудь одну команду. Пусть после $2n - 2$ туров она имела $x - a$ очков, а за последний тур получила еще a очков. Тогда из условия получаем, что $\frac{x-a}{2n-2} = \frac{x}{2n-1}$, откуда следует, что $x = a(2n-1)$.

Таким образом, если команда проиграла в последнем туре ($a = 0$), то она суммарно набрала 0 очков, т.е. проиграла все матчи. Если выиграла ($a = 3$), то суммарно она набрала $3(2n-1)$ очков – максимальное возможное количество очков в турнире, а значит, выиграла все матчи. Если же последний тур она сыграла вничью ($a = 1$), то суммарно она набрала $2n - 1$ очко.

Заметим, что команд, которые выиграли все матчи, может быть не более одной. И команд, которые проиграли все свои матчи, тоже может быть не более одной. Поэтому в последнем туре было не больше одного результативного матча. Таким образом, возможны два варианта: все команды сыграли в последнем туре вничью (и набрали по $2n - 1$ очку каждая) либо есть одна команда, которая выиграла у всех, одна команда, которая всем проиграла, а также $2n - 2$ команды, которые набрали по $2n - 1$ очку.

Посмотрим, как команда могла набрать $2n - 1$ очко за $2n - 1$ матч. Обозначим через w количество ее побед, через l – количество поражений, а через t – количество ничьих. Тогда $3w + t = 2n - 1$ и $w + l + t = 2n - 1$. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $l = 2w$, т.е. команда выигрывала в два раза чаще, чем играла вничью (или $w = l = 0$).

Пусть не все команды сыграли вничью все матчи. Покажем, что тогда суммарное количество поражений команд больше, чем суммарное количество побед. Поскольку эти числа должны быть равны, мы придем к противоречию.

Действительно, пусть $w_1, w_2, \ldots$ – количество побед команд, набравших по $2n - 1$ очку. При этом не все w_i равны нулю. Тогда $2w_1, 2w_2, \ldots$ – количество поражений этих команд. Но тогда в случае, когда все команды набрали по $2n - 1$ очку, суммарное количество поражений команд равно $2(w_1 + w_2 + \ldots + w_{2n})$, а суммарное количество побед равно $(w_1 + w_2 + \ldots + w_{2n})$, а в случае, когда $2n - 2$ команды набрали по $2n - 1$ очку, эти числа равны $n + 2(w_1 + w_2 + \ldots + w_{2n-2})$ и $n + (w_1 + w_2 + \ldots + w_{2n-2})$ соответственно. В обоих случаях суммарное количество поражений больше.

12. Докажем сперва, что такой треугольник существует. Рассмотрим поворотную гомотетию F с центром в начале координат, коэффициентом $\sqrt{2}$ и углом $45°$. Заметим, что в координатах ее можно записать так: $F:(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$, т.е. образ целочисленной решетки снова лежит в целочисленной решетке. Образ любой фигуры при такой гомотетии имеет площадь в два раза большую, чем площадь исходной фигуры, так что образ исходного треугольника удовлетворяет условию.

Заметим, что образ единичного квадрата независимо от его цвета имеет равные черную и белую части площади, т.е. для него утверждение задачи верно. Следовательно, оно верно и для любого прямоугольника с вершинами в узлах решетки и сторонами, параллельными осям координат. Также обратим внимание на то, что образ любого отрезка с концами в узлах при гомотетии F имеет четную разность координат концов, поэтому его (образа) середина – тоже узел решетки. Значит, центр симметрии образа прямоугольника – узел решетки. Но при центральной симметрии относительно любого узла черная клетка переходит в черную, а белая – в белую. Поэтому образ любого прямоугольного треугольника с вершинами в узлах решетки и катетами, параллельными осям координат, имеет равные черную и белую площади. Ну, а любой треугольник получается из прямоугольника вырезанием нескольких таких треугольников.

13. Проведем через точку P прямые PA' и PB' так, чтобы точки A' и B' лежали на BC и AC соответственно и прямые PA' и PB' были параллельны AC и BC соответственно (рис.29). Заметим, что $\angle CAH = 90° - \angle ACH = \angle QBC$.

Пусть R – точка пересечения прямых AC и HQ. Обозначим за D и E точки пересечения HQ с CM и BQ с AC соответственно. Треугольники RDC и QER – прямоугольные, поэтому $\angle ACP = 90° - \angle DRC = \angle HQB$. Следовательно, треугольники APC и BHQ подобны по двум углам.

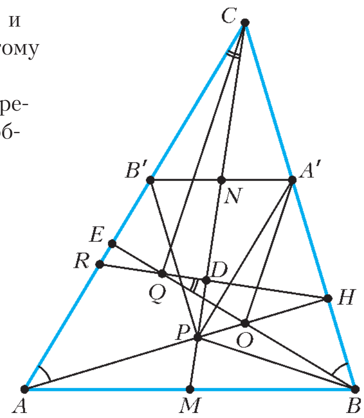


Рис. 29

Пусть O – ортоцентр треугольника ABC. Тогда треугольники BHO и APB' тоже подобны, так как $\angle OHB = 90° = \angle APB'$ и $\angle PAB' = \angle OBH$. Отсюда $\frac{BO}{OQ} = \frac{AB'}{B'C}$. Далее, заметим, что $B'PA'C$ – параллелограмм. Значит, середина N отрезка $A'B'$ лежит на PC. Но так как PC лежит на медиане треугольника ABC, то отрезок $A'B'$ параллелен AB, откуда $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB'}{B'C}$. Из этого и найденного ранее отношения, применяя теорему Фалеса, получаем, что $A'O$ параллельно QC. Теперь рассмотрим треугольник OBA'. Заметим, что так как $A'P \parallel AC$, то $A'P \perp BQ$. Также имеем $OH \perp BA'$, а значит, P – ортоцентр треугольника OBA'. Поэтому $BP \perp A'O$, и в силу параллельности $A'O$ и QC получаем $BP \perp QC$.

14. 17.

Заметим, что при всех натуральных n выполняются равенства

$$a_{n+4} + a_n = a_{n+3} + a_{n-1} = \ldots = a_5 + a_1 = 25 + 1 = 26.$$

Следовательно,

$$a_n = 26 - a_{n+4} = 26 - (26 - a_{n+8}) = a_{n+8},$$

т.е. данная последовательность периодическая с периодом 8. Поскольку остаток от деления 2015 на 8 равен 7, то

$$a_{2015} = a_7 = 26 - a_3 = 17.$$

15. 4545 рублей или 4995 рублей.

Пусть Миша потратил на смартфон $\overline{abcd}$ рублей (a, b, c, d – цифры, причем $a \neq 0$ и $d \neq 0$). Тогда получим уравнение $1{,}2 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$, или $6 \cdot \overline{abcd} = 5 \cdot \overline{dcba}$. Правая часть делится на 5, поэтому $d = 5$. Следовательно,

$$6(1000a + 100b + 10c + 5) = 5(5000 + 100c + 10b + a),$$

$$6(200a + 20b + 2c + 1) = 5000 + 100c + 10b + a.$$

Заметим, что

$$1200a = 5000 + 88c - 110b + a - 6 \le 5000 + 88 \cdot 9 + 3 = 5795 < 6000,$$

поэтому $a < 5$. С другой стороны,

$$1200a = 5000 + 88c - 110b + a - 6 \ge 5000 - 990 - 6 = 4004 > 3600,$$

откуда $a > 3$. Значит, $a = 4$. Остается найти все цифры b и c, удовлетворяющие уравнению $110b - 88c = 198$, т.е. $5b - 4c = 9$. Тут возможны всего два варианта: $b = 5$, $c = 4$ или $b = c = 9$.

16. При $n = 2$ и $n = 3$ утверждение задачи проверяется непосредственно (рис.30). Пусть $n \ge 4$. Сумма площадей n треугольников, на которые разрезан единичный квадрат, равна

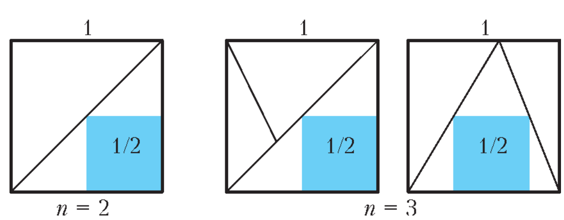


Рис. 30

1, поэтому среди них найдется треугольник с площадью $S \geq 1/n$. Покажем, что этим треугольником можно накрыть квадрат со стороной $1/n$. Пусть a – наибольшая сторона выбранного треугольника, h – высота, опущенная на эту сторону. Рассмотрим квадрат, одна из сторон которого лежит на стороне a треугольника, а еще две вершины находятся на двух других сторонах (рис.31). «Верхняя» сторона этого квадрата отсекает треугольник, подобный исходному с коэффициентом подобия $k = \dfrac{x}{a} = \dfrac{h-x}{h}$, где x – сторона квадрата. Из этого равенства находим $x = \dfrac{ah}{a+h}$.

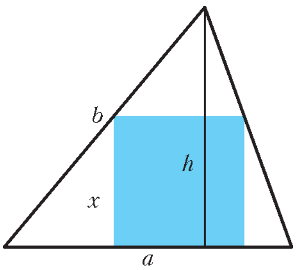


Рис. 31

Если $a + h \leq 2$, то в силу неравенства $S = \dfrac{ah}{2} \geq \dfrac{1}{n}$ получаем $x \geq \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{1}{a+h} \geq \dfrac{1}{n}$, откуда следует требуемое. Если же $a + h > 2$, то $h > 2 - a \geq 2 - \sqrt{2}$, так как $a \leq \sqrt{2}$ (сторона треугольника не больше диагонали исходного единичного квадрата). Кроме того, заметим, что $a \geq h$ (докажите, что наибольшая сторона треугольника не меньше высоты, проведенной к этой стороне!). Пользуясь всеми этими неравенствами, находим

$$x = \frac{1}{1/a + 1/h} \geq \frac{h}{2} \geq \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{4} \geq \frac{1}{n},$$

и снова получаем требуемое.

17. Предположим, что такая расстановка чисел возможна. Рассмотрим произвольный квадрат 2×2 указанного вида. Так как $|ad - bc| = 1$, то числа ad и bc имеют разную четность. Следовательно, среди чисел a, b, c и d есть по крайней мере одно четное и два нечетных числа, причем если в этом квадрате два четных числа, то они стоят по диагонали. Значит, четные числа не могут стоять в соседних по вертикали или по горизонтали ячейках таблицы.

Таблица 8×8 состоит из 16 квадратов такого вида. Так как среди чисел от 1 до 64 есть ровно 32 четных и 32 нечетных, то в каждом из этих квадратов должны быть записаны ровно два четных числа. Занумеруем эти 16 квадратов в произвольном порядке от 1 до 16. Определим для каждого из них свое число, равное дроби $\dfrac{ad}{bc}$, если четными являются числа a и d, и дроби $\dfrac{bc}{ad}$ в противном случае. Обозначим через P_j число, которое получилось для квадрата под номером j. Пусть для определенности в квадрате под номером j четными являются числа a и d. Тогда из равенства $|ad - bc| = 1$ следует

$$\frac{ad}{bc} = 1 \pm \frac{1}{bc} \leq 1 + \frac{1}{bc} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{(b+1)(c+1)}{bc}.$$

Значит, $P_j < Q_j$, где Q_j равно дроби в правой части этого равенства, в знаменателе которой написано произведение двух нечетных чисел из квадрата j, а в числителе – произведение больших их на единицу чисел.

С одной стороны, имеем

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{16} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{64}{63},$$

так как в числителе дробей $P_1, P_2, \ldots, P_{16}$ встретятся по одному разу все четные числа от 2 до 64, а в знаменателях – все нечетные числа от 1 до 63. С другой стороны, имеем

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{16} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{64}{63},$$

так как в знаменателях дробей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{16}$ встретятся по одному разу все нечетные числа от 1 до 63, а в числителях – все четные числа от 2 до 64. Получаем противоречие, ведь по доказанному $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{16} < Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{16}$.

18. Да.

Пусть исходные числа равны 32, 32, 32 и 4, тогда их сумма равна 100. Поскольку $32^2 > 10^3$, получаем $\lg 32 > \lg 10^{3/2} = 1{,}5$. С другой стороны, очевидно, что $\lg 32 < \lg 100 = 2$, т.е. результат округления числа $\lg 32$ равен 2, значит, соответствующее новое число есть $10^2 = 100$. Далее, поскольку $4^2 > 10$, получаем $\lg 4 > \lg 10^{1/2} = 0{,}5$, а так как $\lg 4 < \lg 10 = 1$, результат округления $\lg 4$ равен 1 и соответствующее новое число равно $10^1 = 10$. Таким образом, сумма новых чисел равна 310.

19. 1007.

Заметим сначала, что множитель $\sin\dfrac{n\pi}{x}$ обращается в ноль только при $\dfrac{n\pi}{x} = \pi k$, т.е. $x = \dfrac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Среди этих значений натуральными будут только само число n и все его делители.

Разобьем множители вида $\sin\dfrac{n\pi}{x}$ в левой части уравнения на две группы: к первой отнесем множители, соответствующие числам n от 1 до 1007, а ко второй – числам n от 1008 до 2015. При вычеркивании любого множителя $\sin\dfrac{n\pi}{x}$ из второй группы натуральный корень исходного уравнения, равный n, не обращает в ноль больше никакой оставшийся множитель, поэтому такие множители вычеркивать без изменения числа натуральных корней нельзя. А из первой группы, наоборот, любой множитель вычеркнуть можно (проверьте!), поэтому наибольшее число вычеркнутых множителей равно 1007.

20. При $a \neq 2/3$.

Если $a \leq 0{,}4$, то искомый раствор получается во втором сосуде после переливания из первого сосуда во второй $3a/2$ л обычной воды.

Пусть $0{,}4 < a < 2/3$. Перельем $1 - a$ л воды из первого сосуда во второй и будем последовательно делать такие двойные переливания: из второго сосуда в первый до краев, а затем из первого во второй до краев. Если перед таким двойным переливанием во втором сосуде содержится x л живой воды и $1 - x$ л обычной воды, а в первом сосуде, соответственно, $a - x$ л живой воды и x л обычной, то после первого переливания в первом сосуде станет $a - x + (1-a)x = a - ax$ л живой воды (и он будет полный), а во втором останется ax л живой воды. После второго переливания второй сосуд наполнится доверху, и живой воды в нем станет

$$ax + (1-a)(a - ax) = a^2x + a - a^2 \text{ л.}$$

Таким образом, количество a_n живой воды во втором сосуде после n-го двойного переливания выражается рекуррентно:

$$a_n = a^2 a_{n-1} + a - a^2, \quad a_0 = a.$$

Из рисунка 32, выражающего динамику a_n, видно, что числа a_n монотонно убывают к абсциссе $a/(1+a)$ пересечения прямых $y = a^2x + a - a^2$ и $y = x$. Поскольку $a < 2/3$, имеем $a/(1+a) < 0{,}4$, и найдется такое k, что $a_k \leq 0{,}4 < a_{k-1}$. Тогда, прерывая второе переливание в k-м двойном переливании в нужный мо-

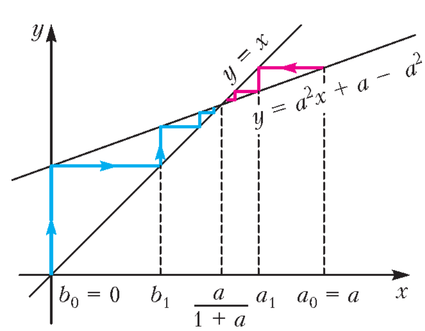


Рис. 32

мент, мы получим искомый 40%-й раствор во втором сосуде (возможно, неполном).

Пусть теперь $2/3 < a < 1$. В этом случае нужно действовать аналогично предыдущему, только двойные переливания надо делать в обратном порядке: сначала из первого сосуда во второй до краев, а затем из второго в первый до краев. Тогда рекуррентное соотношения для количества b_n живой воды в первом сосуде будет иметь вид

$$b_n = a^2 b_{n-1} + a - a^2, \quad b_0 = 0.$$

Из рисунка 32, видно, что числа b_n монотонно возрастают к той же абсциссе $a/(1+a)$ пересечения прямых $y = a^2 x + a - a^2$ и $y = x$. Поскольку $a > 2/3$, имеем $a/(1+a) > 0,4$, и найдется такое k, что $b_{k-1} < 0,4 \le b_k$. Тогда, прерывая второе переливание в k-м двойном переливании в нужный момент, мы получим искомый 40%-й раствор в первом сосуде (возможно, неполном).

Осталось показать, что при $a = 2/3$ требуемый раствор нельзя получить ни в одном из сосудов. Предположим противное: такой раствор получился в результате каких-то переливаний в одном из сосудов впервые. Пусть для определенности это будет первый сосуд. Тогда во втором сосуде раствор не 40%-й, так как при последнем переливании (из второго сосуда в первый) процентное содержание живой воды во втором сосуде не менялось. Но если в первом сосуде получилось x л 40%-го раствора живой воды, т.е. в нем оказалось $0,4x$ л живой воды и $0,6x$ л обычной воды, то во втором сосуде живой воды будет $2/3 - 0,4x$ л, а обычной воды $1 - 0,6x$ л, т.е. в нем тоже будет 40%-й раствор. Противоречие.

21. В 2047 году.

Поставим в соответствие январю каждого года упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $n = 31$ нулей и единиц следующим образом: если k-го января день был ясным, то $a_k = 1$, иначе $a_k = 0$. По условию, 1 января день всегда ясный, поэтому $a_1 = 1$. Выясним, как по набору $a = (1, a_2, \ldots, a_n)$, соответствующему январю текущего года, получить такой набор для января следующего года. Согласно теории анчурийских ученых, этот набор выглядит следующим образом:

$$f_1(a) = (1, 1 \oplus a_2, a_2 \oplus a_3, \ldots, a_{n-1} \oplus a_n),$$

где через $x \oplus y$ обозначен остаток от деления на 2 числа $x + y$. Поскольку $x \oplus x = 0$, через два году погоду будет описывать набор

$$f_2(a) = f_1(f_1(a)) = (1, a_2, 1 \oplus a_3, a_2 \oplus a_4, \ldots, a_{n-2} \oplus a_n),$$

через 4 года – набор

$$f_4(a) = f_2(f_2(a)) = (1, a_2, a_3, a_4, 1 \oplus a_5, a_2 \oplus a_6, \ldots, a_{n-4} \oplus a_n),$$

через 8 лет – набор

$$f_8(a) = f_4(f_4(a)) = (1, a_2, \ldots, a_8, 1 \oplus a_9, a_2 \oplus a_{10}, \ldots, a_{n-8} \oplus a_n)$$

и т.д. Вообще, если $N = 2^m < n$, через N лет погоде в январе будет соответствовать набор

$$f_N(a) = f_{N/2}(f_{N/2}(a)) = (1, a_2, \ldots, a_N, 1 \oplus a_{N+1}, a_2 \oplus a_{N+2}, \ldots, a_{n-N} \oplus a_n).$$

Этот набор еще не совпадает с набором a, так как $1 \oplus a_{N+1} \ne a_{N+1}$. Если же $2N = 2^{m+1} \ge n$, то получим $f_{2N}(a) = f_N(f_N(a)) = (1, a_2, \ldots, a_n) = a$, т.е. погода через $2N$ лет будет меняться ровно так же, как в январе текущего года, где $N = 2^m < n \le 2^{m+1} = 2N$.

Заметим, что если T – наименьший период, с которым повторяется такой набор a, то любой период T_1 делится на T. Действительно, в противном случае число $\text{НОД}(T, T_1) < T$ также является периодом, что противоречит тому, что период T – наименьший. В частности, на T делится число $2N = 2^{m+1}$, а значит, T – степень двойки. Как показано выше, степени двойки, меньшие $2N$, периодами не являются, поэтому $T = 2N$. Таким образом, через $2N$ лет набор a повторится впервые.

При $n = 31$ имеем $N = 2^4 = 16 < n = 31 \le 2N = 32$, поэтому набор, описывающий погоду в 2015 году, повторится впервые ровно через 32 года – в 2047 году.

22. 4.

Если материки представляют собой вершины правильного тетраэдра, вписанного в сферу, то особых точек ровно 4 – это концы радиусов, проведенных из центра сферы через центры граней тетраэдра.

Покажем, что 5 и более особых точек не может быть ни при каком расположении четырех материков. Пусть A – особая точка, r – расстояние от A до ближайших к ней точек суши (не менее трех из которых по условию лежат на разных материках). Точки океана, удаленные от точки A менее чем на r, образуют сферическую «шапочку» $H(A)$. При этом сферические дуги AX и BY, идущие от разных особых точек A и B к каким-то ближайшим к ним точкам суши X и Y соответственно, могут пересекаться только по концевым точкам, т.е. в случае $X = Y$.

Пусть есть 5 особых точек $A_1, \ldots, A_5$. Тогда у каждой из них есть меньшая сферическая «шапочка» $H'(A_i)$, не пересекающаяся ни с какой сферической дугой $A_j X$, где $j \ne i$ и X – точка суши, ближайшая к A_j (рис. 33). Можно считать,

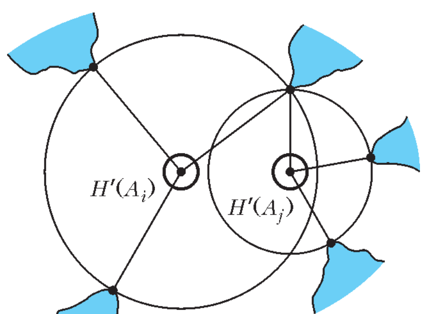


Рис. 33

что «шапочки» $H'(A_i)$ попарно не пересекаются и не касаются.

Действительно, добавляя к каждому материку все части дуг $A_j X$, идущие от его точек X до границ «шапочек» $H'(A_i)$, получим новые материки, которые по-прежнему разделены океаном, для которых точки $A_1, \ldots, A_5$ по-прежнему особые (другие особые точки могут исчезнуть) и при этом новые сферические «шапочки» $H'(A_i)$ не пересекаются и не касаются. Для каждой из точек $A_1, \ldots, A_5$ зафиксируем тройку материков, доходящих до границы ее новой «шапочки». Каким-то двум из них (скажем, A_1 и A_2) соответствует одна и та же тройка материков. Эти материки делят область, ограниченную окружностями «шапочек» $H'(A_1)$ и $H'(A_2)$, на три или более подобластей (если внутри материков есть заполненные океаном «дырки», то таких подобластей может быть сколько угодно), и четвертый материк целиком лежит в одной из этих подобластей. Назовем эту подобласть Ω.

Все точки A_3, A_4, A_5 лежат в Ω (другие подобласти заполнены океаном и граничат не более чем с двумя материками), и каждой из них соответствует одна и та же тройка материков (четвертый и те два из первых трех, которые граничат с Ω). Каждый материк из этой тройки соединяет какие-то две точки на окружностях «шапочек» $H'(A_3)$ и $H'(A_4)$, поэтому океан в разности $\Omega \setminus (H'(A_3) \cup H'(A_4))$ разбит на подобласти, каждая из которых граничит не более чем с двумя материками. Ни в одной из этих подобластей точка A_5 лежать не может. Противоречие.

МОСКОВСКАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015 ГОДА

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $l = 2{,}5$ км. **2.** $v = \dfrac{20}{n}$ см/с , где $n \geq 1$ – целое число.

3. $t \approx 0{,}125$ ч $= 7{,}5$ мин $= 450$ с .

4. 1) Песка со щебнем требуется 25,6 тонны, а цемента – 2,4 тонны. 2) Потребуется совершить 36 поездок (с песком со щебнем).

8 класс

1. $v = 0{,}3$ км/мин $= 18$ км/ч . **2.** $F = \left(m_2 - m_1 + \dfrac{M}{2}\right)g = 25$ Н .

3. $h \approx 1{,}6$ мм . **4.** $T \approx 20{,}4$ °C .

9 класс

1. 1) $u = \dfrac{v\cos\alpha}{\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta}$; 2) $t = \dfrac{v(\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta)\sin^2\alpha}{2g\cos\alpha\sin\beta}$.

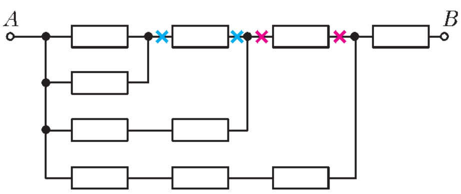


Рис. 34

2. $S = \dfrac{(\rho_в - \rho)a^3}{\rho_в(a + H)}$.

3. $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\tau_2}{4\tau_1} = 1{,}5$.

4. Возможные места разреза отмечены на рисунке 34 красными крестиками.

10 класс

1. $v = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - (\lambda t/L)^2}}$.

2. 1) Сила направлена по радиусу от центра кольца и равна $F_1 = 2mg$. 2) $p_2 = m\sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$.

3. $t_3 = 41{,}6$ °C . **4.** $S = \dfrac{mg}{p_0\left(2(T_1/T_2) - 1\right)} = 2\cdot10^{-4}$ м$^2 = 2$ см^2 ;

$H = \dfrac{4m}{3\rho S} = \dfrac{4p_0}{3\rho g}\left(2\dfrac{T_1}{T_2} - 1\right) \approx 6{,}7$ м .

5. Возможные места разреза отмечены на рисунке 34 синими крестиками.

11 класс

1. $v_к = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - (\lambda t/L)^2}} - v$.

2. 1) $v = 2\sqrt{g(R - r)(1 - \cos\alpha)}$; 2) $F = mg(2 - \cos\alpha)$.

3. 1) Будет; 2) уровень воды вырастет за время $\tau \approx 195$ с .

5. Заднюю (теневую) поверхность шара можно красить как угодно, а переднюю (освещенную) часть надо оставить зеркальной в пределах центрального шарового сегмента высотой

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}3R .$$

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. 1) $s_1 = \dfrac{vD}{v - u} = 150$ м ; 2) $s_2 = \dfrac{v(L - D)}{u} = 900$ м .

2. Часы могут показывать любое время от 07:18 до 07:38.

3. $\rho_{кв} = \dfrac{1530}{664}$ г/см$^3 \approx 2{,}30$ г/см^3 .

4. 1) $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + (3/800)t}$; 2) $\dfrac{\rho_{10}}{\rho_{20}} = \dfrac{86}{83} \approx 1{,}036$; 3) масса воздуха увеличится на

$$\Delta m = \rho_0 V\left(\frac{1}{1 + (3/800)t_2} - \frac{1}{1 + (3/800)t_1}\right) \approx 1{,}75 \text{ кг} .$$

8 класс

1. Автомобилист мог двигаться со скоростью от $\dfrac{14}{13}$ км/мин $\approx 64{,}6$ км/ч до $\dfrac{4}{3}$ км/мин $= 80$ км/ч (постройте возможные графики зависимости пути, пройденного автомобилистом, от времени).

2. 1) $m_0 - \dfrac{F}{2g} \leq m_x \leq m_0 + \dfrac{F}{2g}$; 2) $k = 2$.

3. $\rho_м = \dfrac{\rho_в\rho_ж M}{\rho_ж(M - m) + \rho_в m} \approx 4$ г/см^3 .

4. Высота уровня воды будет постоянной и равной $H = \dfrac{\rho_л}{\rho_в}h = 63$ см .

9 класс

1. 1) Модуль ускорения может быть в диапазоне от 2,84 до 3,08 м/с^2 , 2) координата передней грани бруска может находиться в диапазоне от 65,6 до 75,6 см. *Указание.* Составьте вспомогательную таблицу возможных значений x, t, t^2 и $2x/t^2$.

2. $\rho_{бр} = \dfrac{2}{3}\rho \approx 0{,}67$ г/см^3 . **3.** 1) $P_2 = 10$ Вт ; 2) $t =$ 10:08:40.

4. $R_1 = R_0\dfrac{U_1}{U_1 - U_0} \approx 4412$ Ом , $R_2 = R_0\dfrac{U_1}{U_0} \approx 2273$ Ом .

10 класс

1. Модули ускорений всех грузов одинаковы и равны $a = \dfrac{g}{3}$.

2. $F = mg\left(1 + \dfrac{16H^2}{L^2}\right)$.

3. 1) $V_3 = \dfrac{V_1}{k}$, $T_3 = \dfrac{T_1}{k}$; 2) см. рис.35.

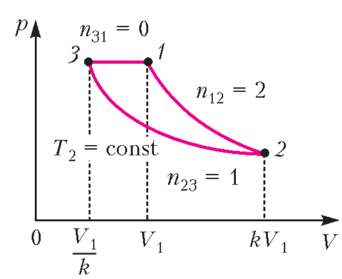


Рис. 35

4. Данная в условии схема эквивалентна более простой схеме, изображенной на рисунке 36. Для нее $R_{общ} = \dfrac{24}{25}$ Ом , поэтому

$P = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{r + R_{общ}}\right)^2 R_{общ} = 6$ Вт.

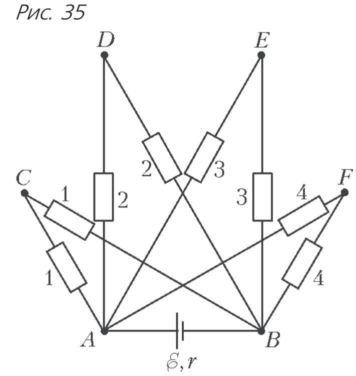


Рис. 36

5. $m = \rho SL\dfrac{n(n - 1)}{2n - 1}(\sin\alpha - \cos\alpha)$.

11 класс

1. $\mu = \dfrac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0{,}46$.

2. 1) $V_3 = kV_1$; 2) см. рис.37 (возможны 3 случая: процесс *1–2* изотермический и $n_{12} = 1$, процесс *2–3* изотермический и $n_{23} = 1$, процесс *3–1* изотермический и $n_{31} = 1$); 3) $T_3 = \dfrac{T_1}{k^2}$, $T_3 = \dfrac{T_1}{k}$, $T_3 = T_1$ (в порядке следования диаграмм на рисунке 37).

3. $C_{AB} = 5$ мкФ (аналогично задаче 4 для 10 класса, можно рассмотреть более простую схему).

4. Посмотрим на конструкцию с направления, совпадающего с осью симметрии цилиндрической поверхности. В этой проекции все грузы расположены в вершинах многоугольника

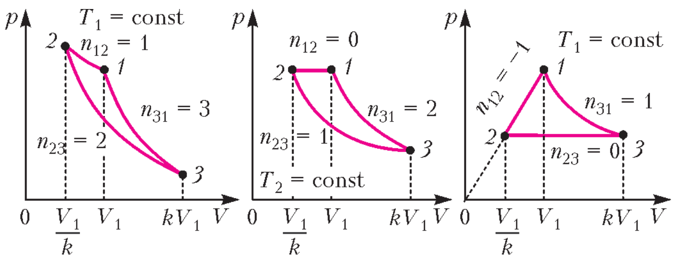


Рис. 37

(можно считать, что в каждой вершине находится груз общей массой $2m$), к серединам сторон многоугольника прикреплены концы пружин. Пусть в некоторый момент времени угол между рейками равен некоторому значению β, которое мало отличается от равновесного значения α (поскольку колебания малы). Обозначим $\beta/2 = \varphi$, а половину длины каждой рейки обозначим λ. Тогда длина стороны многоугольника равна $2\lambda\sin\varphi$ (это расстояние между соседними грузами, расположенными по одну сторону от пружины), а угол, под которым из центра многоугольника видны два соседних груза, равен $2\pi/N$. Поэтому расстояние от оси симметрии цилиндрической поверхности до грузов равно $L = (\lambda\sin\varphi)/\sin(\pi/N)$. Поскольку $N \gg 1$, то $L = (N\lambda\sin\varphi)/\pi$. Координаты грузов, отсчитанные от пружин в направлении вдоль оси цилиндрической поверхности, равны $l = \pm\lambda\cos\varphi$. Кинетическая энергия грузов складывается из энергии, связанной с движением вдоль оси симметрии конструкции и с движением поперек этого направления:

$$E_к = \frac{1}{2}(2m)N\left(\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right) = mN\lambda^2\left(\frac{N^2}{\pi^2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .$$

При $N \gg 1$

$$E_к = m\lambda^2\frac{N^3}{\pi^2}\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .$$

Если пружины деформированы, то суммарная потенциальная энергия, связанная с деформациями пружин, равна

$$E_п = N\frac{k}{2}(2\lambda\sin\varphi - 2\lambda\sin\varphi_0)^2 = 2Nk\lambda^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2 ,$$

где $\varphi_0 = \alpha/2$. Введем обозначение: $x = \lambda(\sin\varphi - \sin\varphi_0)$. Тогда суммарная механическая энергия конструкции равна

$$E_п + E_к = 2Nk\lambda^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2 + m\lambda^2\frac{N^3}{\pi^2}\left(\frac{d(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}{dt}\right)^2 = 2Nkx^2 + m\frac{N^3}{\pi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \text{const} .$$

Отсюда сразу следует, что система будет совершать гармонические колебания, квадрат круговой частоты и период которых равны

$$\omega^2 = \frac{2\pi^2 k}{mN^2} \text{ и } T = \frac{2\pi}{\omega} = N\sqrt{\frac{2m}{k}} .$$

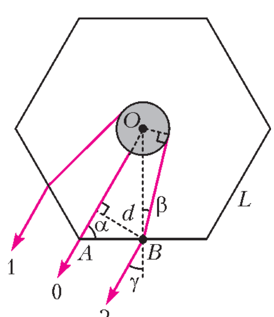


Рис. 38

5. Согласно условию задачи, ручка находится от глаза на расстоянии, которое во много раз больше L, поэтому в глаз попадает узкий пучок световых лучей, идущих от канала. При положении ручки, когда видимая ширина канала максимальна, эта видимая ширина определяется расстоянием между двумя крайними лучами 1 и 2 (рис.38), которые идут от границ канала и после преломления попадают в глаз. Эти лучи параллельны плоскости, в которой находятся глаз наблюдателя, ось симметрии ручки и ближнее к глазу наблюдателя ребро ручки A. В этой плоскости лежат отрезок OA и центральный луч 0, который идет от центра канала O и без преломления проходит через ближнее к глазу ребро шестигранника. Минимальная видимая ширина канала, равная его настоящему диаметру d, очевидно, достигается тогда, когда канал рассматривается через одну из граней корпуса и все лучи проходят через эту грань. По условию, максимальная видимая ширина канала вдвое больше минимальной. Поэтому расстояние между лучами 0 и 2 (а также между лучами 0 и 1) равно диаметру d канала. Исходя из этого, найдем точку B на грани корпуса ручки, через которую проходит, например, крайний падающий в глаз луч 2. Поскольку $\alpha = 60°$, то

$$AB = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{2d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{4d}{\sqrt{3}} = \frac{L}{2} .$$

Следовательно, лучи, идущие в направлении глаза от точек канала, расположенных максимально далеко от оси симметрии ручки, проходят через середины двух соседних граней корпуса, сквозь которые виден канал. Это дает возможность определить синус угла падения луча 2 на грань корпуса и синус угла преломления этого луча:

$$\sin\beta = \frac{d/2}{OB} = \frac{d}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{4} , \quad \sin\gamma = \frac{1}{2} .$$

В соответствии с законом преломления света, $n\sin\beta = \sin\gamma$, откуда находим искомый показатель преломления материала корпуса ручки:

$$n = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2 .$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

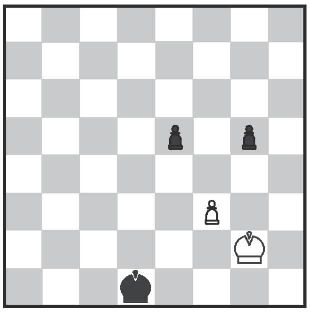
Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru

ПешкИ И ГЕОМЕТРИЯ

Сегодняшняя «страничка» посвящена простейшему соотношению сил на доске – две пешки против одной (конечно, не считая королей). Но это и одно из самых интересных окончаний. Несмотря на незамысловатый материал, придумано множество занятных этюдов, важных для практики. И в них, как мы убедимся, решающее значение имеет геометрическое понятие – оппозиция.



Г.Нейштадтль, 1890

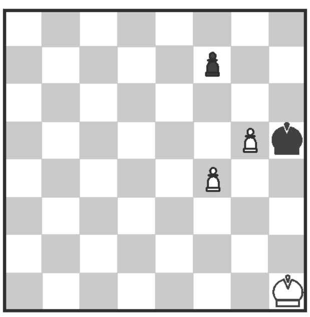
Ничья

Эта старинная позиция служит хорошей иллюстрацией оппозиции.

1. ♔h1! Тонкий ход, все остальное ведет к фиаско, например: 1. ♔f1? ♔d2 2. ♔f2 ♔d3 3. ♔g3 ♔e3 4. ♔g2 ♔e2 5. ♔g3 ♔f1 6. ♔g4 ♔f2.

1...♔d2. Если 1...♔c1, то 2. ♔g1! g4 3. ♔g2! ♔d2 4. fg.

2. ♔h2! ♔e2 3. ♔g2! ♔e3 4. ♔g3 ♔d3 5. ♔h3! Ничья.



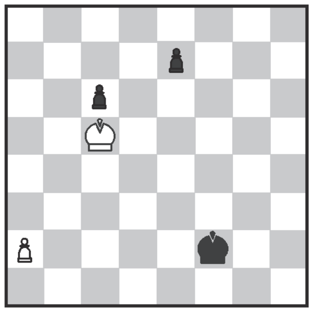
Г.Матисон, 1918

Ничья

Известно, что у проходной пешки имеются «ключевые» поля, попав на которые, король обеспечивает ее проведение. Эти поля располагаются через одну горизонталь от проходной. Борьба за них тоже ведется с помощью оппозиции. В данном случае белые пешки обречены, а ключевые поля пешки f7, которая станет проходной, находятся на пятой горизонтали, и черный король готов занять их.

1. g6! fg. Приходится брать пешкой, что смещает ключевые поля на горизонталь ниже. Но это только полдела. При 2. ♔g2? ♔g4 3. f5 gf 4. ♔h2 ♔f3 черные успевают на ключевые поля, а в случае 2. ♔h2 ♔g4 3. f5 прорываются на них после 3...♔:f5! 4. ♔g3 ♔g5 5. ♔h3 ♔f4 и т.д.

2. f5! gf 3. ♔g1! Черному королю предлагается первому занять четвертую горизонталь. 3...♔g5 4. ♔f1! ♔g4 5. ♔g2 с ничьей.



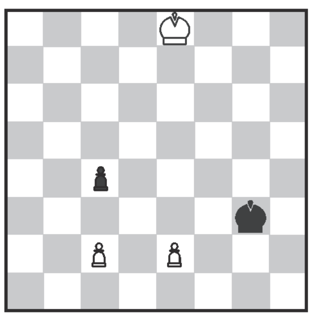
Н.Григорьев, 1936

Выигрыш

1. ♔d4! Теперь возникают два варианта с разными идеями.

а) **1...c5+ 2. ♔:c5 ♔g3! 3. a4! e5 4. a5 e4 5. ♔d4! ♔f4! 6. a6 e3 7. ♔d3! ♔f3 8. a7 e2 9. a8♕+** с победой.

б) **1...e5+ 2. ♔:e5 ♔e3 3. a4 ♔d3 4. a5 c5 5. a6 c4 6. a7 c3 7. a8♕ c2.** При короле на d2 была бы ничья, но его позиция неудачна. **8. ♕d5+! ♔e2 9. ♕a2! ♔d1 10. ♔d4 c1♕ 11. ♔d3!**, и все кончено. Или 8...♔e3 9. ♕g2! c1♕ 10. ♕g5+ с выигрышем.



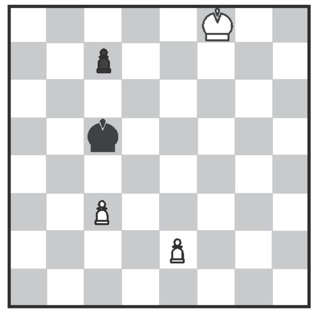
И.Фритз, 1951

Выигрыш

Черный король близко к пешкам, но справиться с ними не успевает. **1. ♔f7!** Естественный ход 1. ♔e7? не годится из-за 1...♔f2! 2. e4, и сам король мешает маршу пешки к восьмой горизонтали. Недостаточно и 1. ♔d7, так как после 1...♔f2! 2. e4 c3 3. e5 ♔e3 4. e6 ♔d2 5. e7 ♔:c2 6. e8♕ ♔d2 возникает теоретическая ничья.

1...c3. Теперь 1...♔f2 проигрывает: 2. e4 c3 3. e5 ♔e3 4. e6 ♔d2 5. e7 ♔:c2 6. e8♕ ♔d2 7. ♕d8+ ♔c1 8. ♕g5+, и пешка «с» не успела сделать еще один шаг (6...♔d1 7. ♕d8+! ♔e1 8. ♕g5+).

2. ♔e6! ♔f2 3. ♔d5! ♔:e2 4. ♔c4 ♔d2 5. ♔b3!, и все становится ясно.

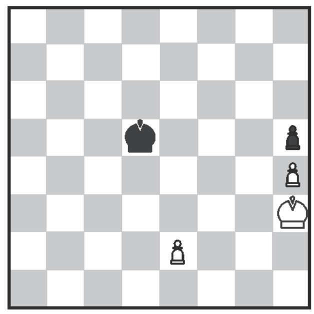


М.Зинар, 1981

Выигрыш

Не годится 1. ♔e7? ♔c4 2. e4 ♔:c3!, и собственный король мешает движению белой пешки. Или 1. ♔f7? ♔d5! 2. ♔f6 ♔c4! 3. e4 ♔:c3 4. e5 c5, и король опять стал помехой.

1. ♔g7! Странный ход, но только он решает. **1...♔d5! 2. ♔f7! ♔e5 3. ♔e7 ♔d5! 4. ♔d7! ♔c4 5. ♔c6! ♔:c3 6. ♔c5!** Победа.

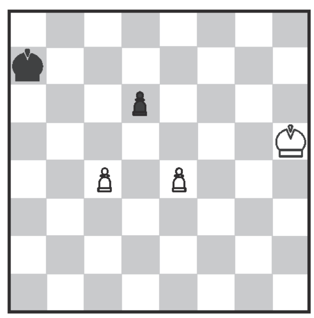


Н.Григорьев, 1936

Выигрыш

1. ♔g3! ♔e4 2. ♔g2! ♔e3 3. ♔f1 ♔e4 4. ♔e1 ♔e3 5. ♔d1 ♔f4 6. ♔d2 ♔e4 7. e3 ♔f3 8. ♔d3 ♔g3 9. ♔e4 ♔g4 10. ♔e5 ♔:h4 11. ♔f4 ♔h3 12. e4 ♔g2 13. e5! h4 14. e6 h3 15. e7 h2 16. e8♕ h1♕ 17. ♕e2+ ♔g1 18. ♔g3, и все кончено.

Примечательно, что этот этюд победил на крупном международном конкурсе (по теме «король и две пешки против короля с пешкой»).



А.Мандлер, 1929

Выигрыш

1. ♔g6! ♔a6 2. ♔g7! ♔a7! Черные сохраняют дальнюю оппозицию, но... **3. ♔g8! ♔a8! 4. c5! dc 5. e5 c4 6. e6 c3 7. e7 c2 8. e8♕+** с выигрышем.

Е.Гик

Индекс 90964

ФОТОГРАФИИ МЫЛЬНЫХ ПУЗЫРЕЙ

Однажды летом на даче были сделаны фотографии мыльных пузырей, в которых, как в зеркале, можно было увидеть окружающие нас предметы. Оказалось, что изображения в мыльных пузырях обладают рядом особенностей.

(Продолжение – на с. 2 внутри журнала)